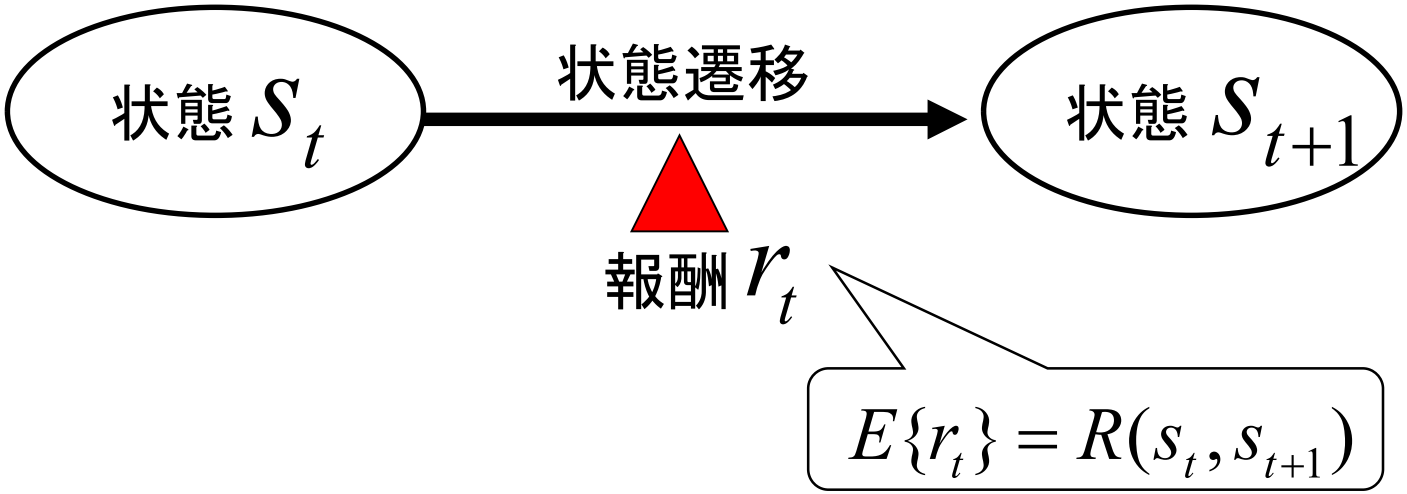
【前回の講義の復習】

マルコフ過程(Markov Process)とは？

S :状態の集合

Pr(s’|s) :状態sのもとで、s’へ遷移する条件付確率

$R(s, s')$:状態 s から s’ へ遷移したときの報酬(またはコスト)の条件付期待値



状態遷移行列

状態S'へ遷移する確率

状態Sより

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} \text{S1} & \text{S2} & \ldots & \text{Sn} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{S1} \\ \text{S2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \text{Sn} \end{array} & \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \Pr(s_1 \mid s_1) & \Pr(s_2 \mid s_1) & \cdots & \Pr(s_n \mid s_1) \\ \Pr(s_1 \mid s_2) & \Pr(s_2 \mid s_2) & \cdots & \Pr(s_n \mid s_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Pr(s_1 \mid s_n) & \Pr(s_2 \mid s_n) & \cdots & \Pr(s_n \mid s_n) \end{bmatrix}
\end{array}
$$

・各要素は必ず0以上1以下

・各行の要素を全て合計すると必ず１になる

状態分布行列

状態S2に存在する確率

状態S1に存在する確率

状態Snに存在する確率

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

例1） 全ての状態に等しい確率で存在するとき

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{n} & \dfrac{1}{n} & \cdots & \dfrac{1}{n} \end{bmatrix}$$

例2） 状態S1にのみ存在するとき

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

1ステップ遷移後の状態分布の計算

（注：Trans = 転置）

初期状態分布　　状態遷移行列

1ステップ後の状態分布

$$\begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \\ \vdots \\ x_n(1) \end{bmatrix}^{Trans} = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}^{Trans} \begin{bmatrix} \Pr(s_1 \mid s_1) & \Pr(s_2 \mid s_1) & \cdots & \Pr(s_n \mid s_1) \\ \Pr(s_1 \mid s_2) & \Pr(s_2 \mid s_2) & \cdots & \Pr(s_n \mid s_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Pr(s_1 \mid s_n) & \Pr(s_2 \mid s_n) & \cdots & \Pr(s_n \mid s_n) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(1) \quad = \mathbf{x}(0) \;\; \mathbf{P}$$

---

nステップ遷移後の状態分布の計算

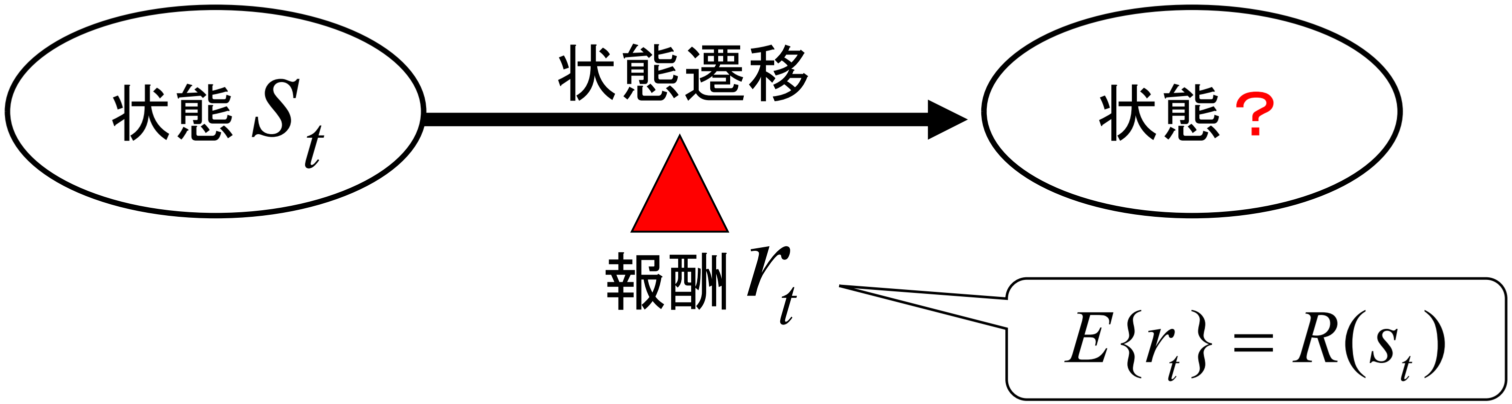
初期状態分布　　状態遷移行列

nステップ後の状態分布

$$\begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_n(n) \end{bmatrix}^{Trans} = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}^{Trans} \begin{bmatrix} \Pr(s_1 \mid s_1) & \Pr(s_2 \mid s_1) & \cdots & \Pr(s_n \mid s_1) \\ \Pr(s_1 \mid s_2) & \Pr(s_2 \mid s_2) & \cdots & \Pr(s_n \mid s_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Pr(s_1 \mid s_n) & \Pr(s_2 \mid s_n) & \cdots & \Pr(s_n \mid s_n) \end{bmatrix}^{n}$$

$$\mathbf{x}(n) \quad = \mathbf{x}(0) \;\; \mathbf{P}^{n}$$

報酬は状態遷移に伴って発生する



報酬行列　報酬の期待値は1×nの行列になる

遷移先の全ての状態について合計

$$
\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \Pr(s_i \mid s_1) R(s_1, s_i) \\ \sum_{i=1}^{n} \Pr(s_i \mid s_2) R(s_2, s_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \Pr(s_i \mid s_n) R(s_n, s_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(s_1) \\ R(s_2) \\ \vdots \\ R(s_n) \end{bmatrix}
\begin{array}{l} \leftarrow \text{状態S1の報酬の期待値} \\ \leftarrow \text{状態S2の報酬の期待値} \\ \\ \leftarrow \text{状態Snの報酬の期待値} \end{array}
$$

「マルコフ性」とは？

状態 s‘ への遷移が，そのときの状態 s にのみ依存し，
それ以前の状態には関係ないこと。

「エルゴード性」とは？

任意の状態sからスタートし，無限時間経過した後の
状態分布確率が最初の状態とは無関係になること。
この極限の状態分布 $\mathbf{a} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]$ は「定常分布」と呼ばれる。

（ただしエルゴード的なマルコフ過程は既約で非周期的という
必要十分条件を満たす必要がある）

$$\text{定常分布}\begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{x}(\infty) = \mathbf{x}(0)\ \mathbf{P}^{\infty} \\ \quad = \mathbf{a}\ \mathbf{P} \end{cases}$$

定常分布を求める方程式

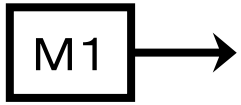
平均報酬： $\mathbf{a}\ \mathbf{R}$

$\mathbf{a}$ は $\mathbf{P}^{Trans}$ の固有値1の固有ベクトル

【演習問題】

学籍番号
氏　名

右図のように，機械M1によって製品が生産される工場がある.



●機械M1は「稼働」と「休止」の２状態を有する.
●機械の状態遷移は，一定時間間隔で離散的に起きる.
●機械が「稼動」状態にあるとき、次ステップでは確率 0.5 で稼動状態を継続
●機械が「休止」状態にあるとき、次ステップでは確率 0.4 で稼動状態へ復帰
●機械が「稼動」状態にあり、次のステップでも稼動しているとき、状態遷移によって報酬 9 万円を得る
●機械が「稼動」状態にあり、次のステップで休止するとき、状態遷移によって報酬 3 万円を得る
●機械が「休止」状態にあり、次のステップでも休止しているとき、状態遷移によって報酬 −7 万円を得る
●機械が「休止」状態にあり、次のステップで稼動するとき、状態遷移によって報酬 3 万円を得る

問１: 状態遷移確率行列と報酬行列を求めよ。

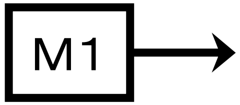
問２: 機械M1の平均稼働率を求めよ。それを知るためには何を計算すればよいか？

問３: この機械で得られる平均報酬を求めよ。

【演習問題】

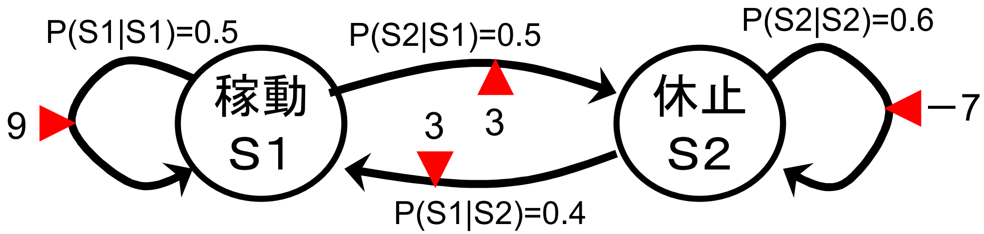
学籍番号
氏　名

右図のように，機械M1によって製品が生産される工場がある.



- 機械M1は「稼働」と「休止」の2状態を有する.
- 機械の状態遷移は，一定時間間隔で離散的に起きる.
- 機械が「稼動」状態にあるとき、次ステップでは確率 0.5 で稼動状態を継続
- 機械が「休止」状態にあるとき、次ステップでは確率 0.4 で稼動状態へ復帰
- 機械が「稼動」状態にあり、次のステップでも稼動しているとき、状態遷移によって報酬 9 万円を得る
- 機械が「稼動」状態にあり、次のステップで休止するとき、状態遷移によって報酬 3 万円を得る
- 機械が「休止」状態にあり、次のステップでも休止しているとき、状態遷移によって報酬 −7 万円を得る
- 機械が「休止」状態にあり、次のステップで稼動するとき、状態遷移によって報酬 3 万円を得る

問1：状態遷移確率行列と報酬行列を求めよ。



$$P = \begin{bmatrix} P(s_1 \mid s_1) & P(s_2 \mid s_1) \\ P(s_1 \mid s_2) & P(s_2 \mid s_2) \end{bmatrix} = ?$$

$$R = \begin{bmatrix} R(s_1) \\ R(s_2) \end{bmatrix} = ?$$

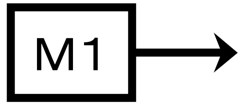
問2：機械M1の平均稼働率を求めよ。それを知るためには何を計算すればよいか？

問3：この機械で得られる平均報酬を求めよ。

【演習問題】

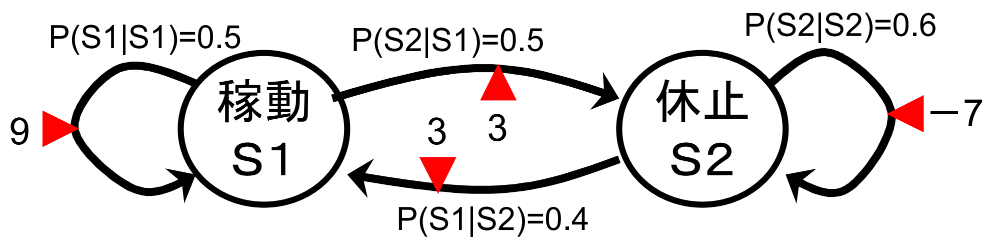
学籍番号
氏　名

右図のように，機械M1によって製品が生産される工場がある.



●機械M1は「稼働」と「休止」の2状態を有する.
●機械の状態遷移は，一定時間間隔で離散的に起きる.
●機械が「稼動」状態にあるとき、次ステップでは確率 0.5 で稼動状態を継続
●機械が「休止」状態にあるとき、次ステップでは確率 0.4 で稼動状態へ復帰
●機械が「稼動」状態にあり、次のステップでも稼動しているとき、状態遷移によって報酬 9 万円を得る
●機械が「稼動」状態にあり、次のステップで休止するとき、状態遷移によって報酬 3 万円を得る
●機械が「休止」状態にあり、次のステップでも休止しているとき、状態遷移によって報酬 －7 万円を得る
●機械が「休止」状態にあり、次のステップで稼動するとき、状態遷移によって報酬 3 万円を得る

問1：状態遷移確率行列と報酬行列を求めよ。



$$P = \begin{bmatrix} P(s_1 \mid s_1) & P(s_2 \mid s_1) \\ P(s_1 \mid s_2) & P(s_2 \mid s_2) \end{bmatrix} = ?$$

$$R = \begin{bmatrix} R(s_1) \\ R(s_2) \end{bmatrix} = ?$$

問2：機械M1の平均稼働率を求めよ。それを知るためには何を計算すればよいか？

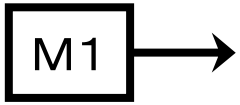
定常分布を計算し、状態S1の確率を求める。

問3：この機械で得られる平均報酬を求めよ。

【演習問題】

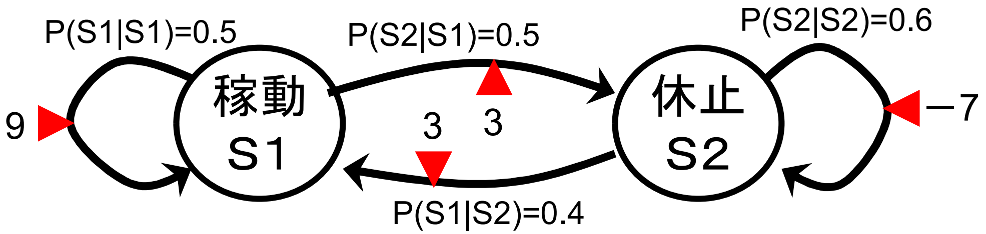
学籍番号
氏　名

右図のように，機械M1によって製品が生産される工場がある.



- ●機械M1は「稼働」と「休止」の２状態を有する.
- ●機械の状態遷移は，一定時間間隔で離散的に起きる.
- ●機械が「稼動」状態にあるとき、次ステップでは確率 0.5 で稼動状態を継続
- ●機械が「休止」状態にあるとき、次ステップでは確率 0.4 で稼動状態へ復帰
- ●機械が「稼動」状態にあり、次のステップでも稼動しているとき、状態遷移によって報酬 9 万円を得る
- ●機械が「稼動」状態にあり、次のステップで休止するとき、状態遷移によって報酬 3 万円を得る
- ●機械が「休止」状態にあり、次のステップでも休止しているとき、状態遷移によって報酬 −7 万円を得る
- ●機械が「休止」状態にあり、次のステップで稼動するとき、状態遷移によって報酬 3 万円を得る

問1：状態遷移確率行列と報酬行列を求めよ。



$$P = \begin{bmatrix} P(s_1 \mid s_1) & P(s_2 \mid s_1) \\ P(s_1 \mid s_2) & P(s_2 \mid s_2) \end{bmatrix} = ?$$

$$R = \begin{bmatrix} R(s_1) \\ R(s_2) \end{bmatrix} = ?$$

問2：機械M1の平均稼働率を求めよ。それを知るためには何を計算すればよいか？

定常分布を計算し、状態S1の確率を求める。

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(s_1 \mid s_1) & P(s_2 \mid s_1) \\ P(s_1 \mid s_2) & P(s_2 \mid s_2) \end{bmatrix} \\ a_1 + a_2 = 1 \end{cases}$$

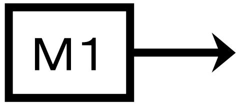
この方程式を解くと

問3：この機械で得られる平均報酬を求めよ。

【演習問題】

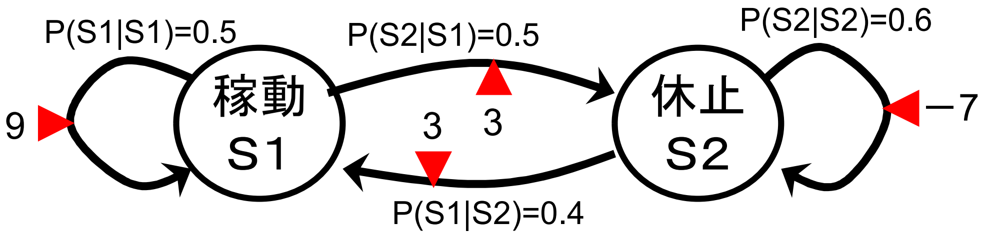
学籍番号
氏　名

右図のように，機械M1によって製品が生産される工場がある．



●機械M1は「稼働」と「休止」の2状態を有する．
●機械の状態遷移は，一定時間間隔で離散的に起きる．
●機械が「稼動」状態にあるとき、次ステップでは確率 0.5 で稼動状態を継続
●機械が「休止」状態にあるとき、次ステップでは確率 0.4 で稼動状態へ復帰
●機械が「稼動」状態にあり、次のステップでも稼動しているとき、状態遷移によって報酬 9 万円を得る
●機械が「稼動」状態にあり、次のステップで休止するとき、状態遷移によって報酬 3 万円を得る
●機械が「休止」状態にあり、次のステップでも休止しているとき、状態遷移によって報酬 −7 万円を得る
●機械が「休止」状態にあり、次のステップで稼動するとき、状態遷移によって報酬 3 万円を得る

問1：状態遷移確率行列と報酬行列を求めよ。



$$P = \begin{bmatrix} P(s_1 \mid s_1) & P(s_2 \mid s_1) \\ P(s_1 \mid s_2) & P(s_2 \mid s_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} R(s_1) \\ R(s_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \times 9 + 0.5 \times 3 \\ 0.4 \times 3 + 0.6 \times (-7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

問2：機械M1の平均稼働率を求めよ。それを知るためには何を計算すればよいか？

定常分布を計算し、状態S1の確率を求める。

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \\ a_1 + a_2 = 1 \end{cases}$$

この方程式を解くと $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\frac{4}{9}} & \frac{5}{9} \end{bmatrix}$

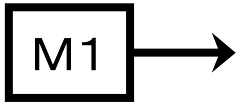
「稼動」状態の確率
＝平均稼働率

問3：この機械で得られる平均報酬を求めよ。

【演習問題】

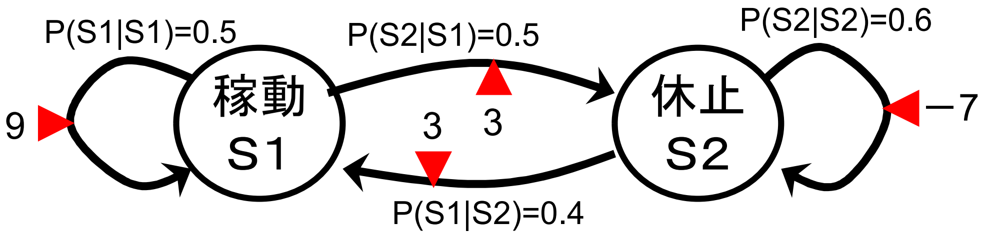
学籍番号
氏　名

右図のように，機械M1によって製品が生産される工場がある.



- 機械M1は「稼働」と「休止」の2状態を有する.
- 機械の状態遷移は，一定時間間隔で離散的に起きる.
- 機械が「稼動」状態にあるとき、次ステップでは確率 0.5 で稼動状態を継続
- 機械が「休止」状態にあるとき、次ステップでは確率 0.4 で稼動状態へ復帰
- 機械が「稼動」状態にあり、次のステップでも稼動しているとき、状態遷移によって報酬 9 万円を得る
- 機械が「稼動」状態にあり、次のステップで休止するとき、状態遷移によって報酬 3 万円を得る
- 機械が「休止」状態にあり、次のステップでも休止しているとき、状態遷移によって報酬 −7 万円を得る
- 機械が「休止」状態にあり、次のステップで稼動するとき、状態遷移によって報酬 3 万円を得る

問1：状態遷移確率行列と報酬行列を求めよ。



$$P=\begin{bmatrix} P(s_1\mid s_1) & P(s_2\mid s_1) \\ P(s_1\mid s_2) & P(s_2\mid s_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\ 0.4 & 0.6\end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix} R(s_1) \\ R(s_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5\times 9+0.5\times 3\\ 0.4\times 3+0.6\times(-7)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ -3\end{bmatrix}$$

問2：機械M1の平均稼働率を求めよ。それを知るためには何を計算すればよいか？

定常分布を計算し、状態S1の確率を求める。

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}a_1 & a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\ 0.4 & 0.6\end{bmatrix}\\ a_1+a_2=1\end{cases}$$

この方程式を解くと $\begin{bmatrix}a_1 & a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boxed{\frac{4}{9}} & \frac{5}{9}\end{bmatrix}$

「稼動」状態の確率
＝平均稼働率

問3：この機械で得られる平均報酬を求めよ。

定常分布と報酬行列より $\begin{bmatrix}a_1 & a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R(s_1)\\ R(s_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{9} & \frac{5}{9}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ -3\end{bmatrix}=1$

九州大学 工学部地球環境工学科
船舶海洋システム工学コース

システム設計工学 （担当：木村）

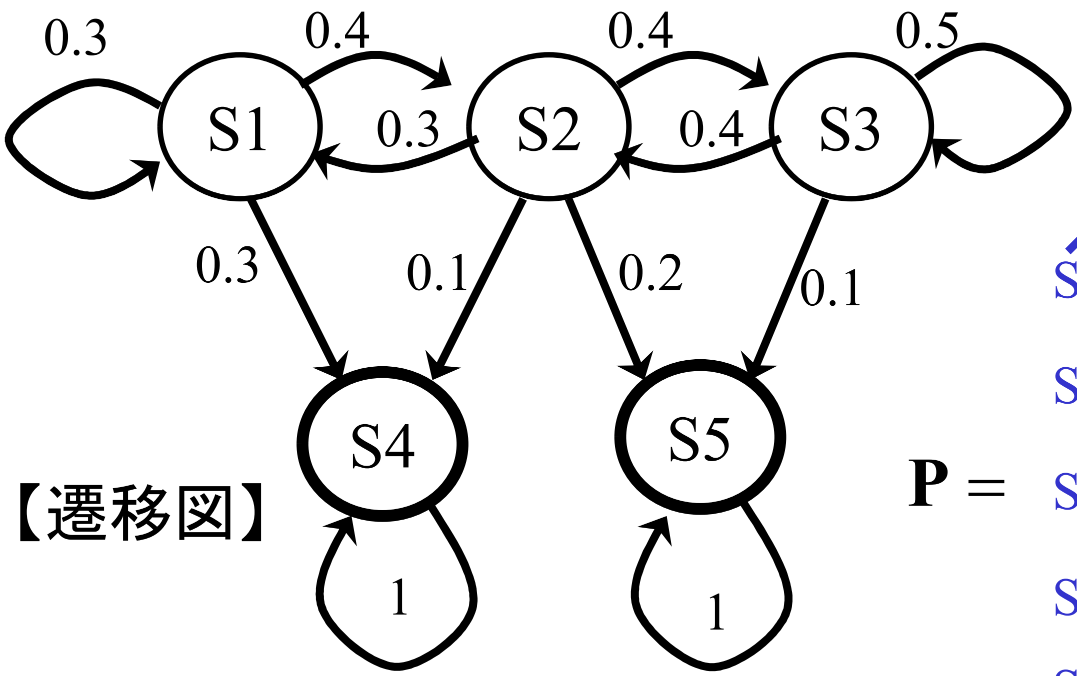
（10） 吸収マルコフ過程

場所：船1講義室

http://sysplan.nams.kyushu-u.ac.jp/gen/index.html

吸収的マルコフ過程

●状態遷移に「終わり」の存在するような問題をモデル化
例）劣化する機械の管理問題など
●終わりの状態＝ $\boxed{}$



【遷移図】

一時的状態：S1, S2, S3
吸収状態：　S4, S5

【推移確率行列】

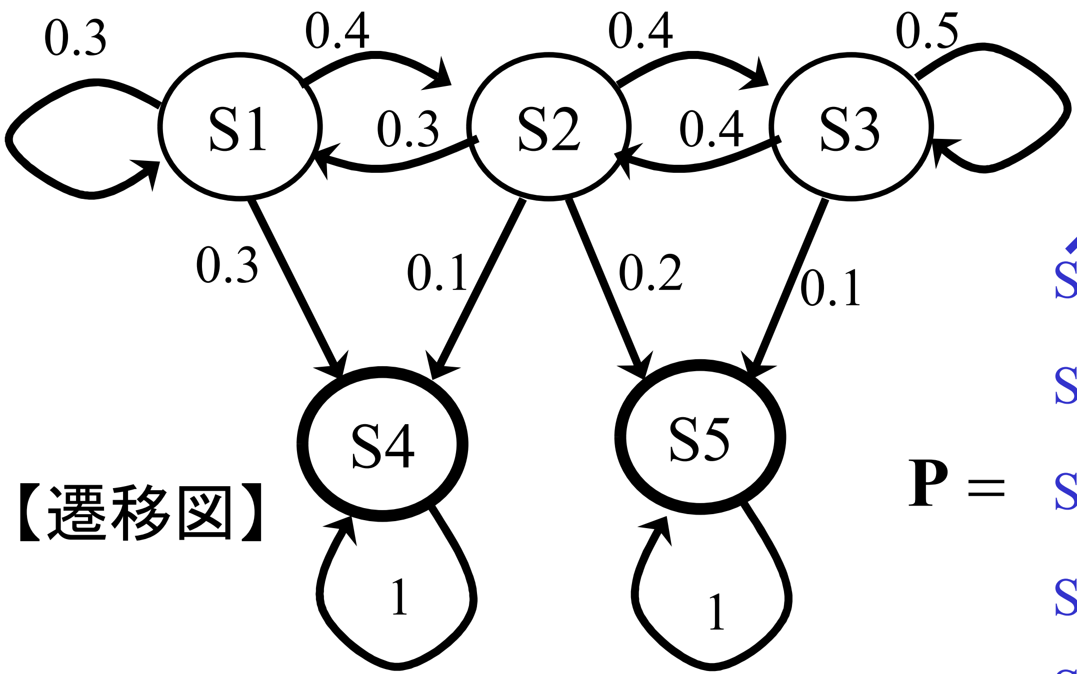
$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ S1 \\ S2 \\ S3 \\ S4 \\ S5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} S1 & S2 & S3 & S4 & S5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|cc} 0.3 & 0.4 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & 0.5 & 0 & 0.1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

一時的状態の行列 $\mathbf{Q}$

行列 $\mathbf{U}$

吸収的マルコフ過程

- ●状態遷移に「終わり」の存在するような問題をモデル化
  例）劣化する機械の管理問題など
- ●終わりの状態＝ 吸収状態



【遷移図】

一時的状態：S1, S2, S3
吸収状態：　S4, S5

【推移確率行列】

$$
\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ S1 \\ S2 \\ S3 \\ S4 \\ S5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} S1 & S2 & S3 & S4 & S5 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc|cc}
0.3 & 0.4 & 0 & 0.3 & 0 \\
0.3 & 0 & 0.4 & 0.1 & 0.2 \\
0 & 0.4 & 0.5 & 0 & 0.1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

一時的状態の行列 $\mathbf{Q}$

行列 $\mathbf{U}$

吸収的マルコフ過程の遷移確率行列

【推移確率行列】

一時的状態
の行列 **Q**

各状態から各吸収状態へ
陥る確率の行列 **U**

$$\mathbf{P}=\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{Q} & \mathbf{U}\\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{array}\right]$$

ゼロ行列

単位行列

吸収的マルコフ過程の状態遷移

$$[\sigma_1(t) \quad \sigma_2(t) \quad \sigma_3(t) \quad \sigma_4(t) \quad \sigma_5(t)] = [\sigma_1(0) \quad \sigma_2(0) \quad \sigma_3(0) \quad \sigma_4(0) \quad \sigma_5(0)] \left[\begin{array}{ccc|cc} 0.3 & 0.4 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & 0.5 & 0 & 0.1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]^t$$

tステップ後の
状態分布

初期状態分布

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}(0)\,\mathbf{P}^t$$

$$\mathbf{P}^t = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{Q}^t & \mathbf{U}(t) \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array}\right]$$

吸収的マルコフ過程の状態遷移

$$\begin{bmatrix}\sigma_1(t) & \sigma_2(t) & \sigma_3(t) & \sigma_4(t) & \sigma_5(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sigma_1(0) & \sigma_2(0) & \sigma_3(0) & \sigma_4(0) & \sigma_5(0)\end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|cc} 0.3 & 0.4 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & 0.5 & 0 & 0.1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]^t$$

tステップ後の
状態分布

初期状態分布

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}(0)\,\mathbf{P}^t$$

$$\boxed{\mathbf{U}(t) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 + \cdots + \mathbf{Q}^{t-1}\right)\mathbf{U}}$$

$$\mathbf{P}^t = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{Q}^t & \mathbf{U}(t) \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array}\right]$$

吸収的マルコフ過程の極限

$t \to \infty$ とすると $\mathbf{I} + \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 + \cdots = \boxed{} = \mathbf{M}$

基本行列

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}^t = \boxed{}$$

i からスタートして1ステップ後に j に存在する確率

i からスタートして2ステップ後に j に存在する確率

【平均訪問回数】 基本行列 M の要素 $m_{ij} = p_{ij}^{(1)} + p_{ij}^{(2)} + p_{ij}^{(3)} + \cdots$ は「i からスタートした遷移が吸収状態に陥るまでに一時的状態 j を訪問する平均回数を表す。

【吸収確率】 行列 MU = B の要素 b_{ij} は「iからスタートして j へ陥る確率」すなわち吸収確率を表す。

【平均吸収時間】 状態 i からスタートして、いずれかの吸収状態に陥るまでの平均時間（ステップ数）は、基本行列 M および全ての要素が1の列ベクトル g を用いて Mg によって表される。（平均訪問回数を 全てのj について合計した値）

吸収的マルコフ過程の極限

$t \to \infty$ とすると $\mathbf{I} + \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 + \cdots = \boxed{(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}} = \mathbf{M}$

基本行列

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}^t = \boxed{\phantom{\mathbf{M}}}$$

i からスタートして1ステップ後に j に存在する確率

i からスタートして2ステップ後に j に存在する確率

【平均訪問回数】 基本行列 M の要素 $m_{ij} = p_{ij}^{(1)} + p_{ij}^{(2)} + p_{ij}^{(3)} + \cdots$ は「i からスタートした遷移が吸収状態に陥るまでに一時的状態 j を訪問する平均回数を表す。

【吸収確率】 行列 MU = B の要素 b_{ij} は「iからスタートして j へ陥る確率」すなわち吸収確率を表す。

【平均吸収時間】 状態 i からスタートして、いずれかの吸収状態に陥るまでの平均時間(ステップ数)は、基本行列 M および全ての要素が1の列ベクトル g を用いて Mg によって表される。(平均訪問回数を全ての j について合計した値)

吸収的マルコフ過程の極限

$t \to \infty$ とすると $\mathbf{I} + \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 + \cdots = \boxed{(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}} = \mathbf{M}$

基本行列

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}^t = \boxed{\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{MU} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array}\right]}$$

i からスタートして1ステップ後に j に存在する確率

i からスタートして2ステップ後に j に存在する確率

【平均訪問回数】 基本行列 M の要素 $m_{ij} = p_{ij}^{(1)} + p_{ij}^{(2)} + p_{ij}^{(3)} + \cdots$
は「i からスタートした遷移が吸収状態に陥るまでに一時的状態 j を訪問する平均回数を表す。

【吸収確率】 行列 MU = B の要素 b_{ij} は
「iからスタートして j へ陥る確率」すなわち吸収確率を表す。

【平均吸収時間】 状態 i からスタートして、いずれかの吸収状態に陥るまでの平均時間（ステップ数）は、基本行列 M および全ての要素が1の列ベクトル g を用いて Mg によって表される。
（平均訪問回数を全ての j について合計した値）

吸収的マルコフ過程の極限：報酬合計の計算

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}^t = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{MU} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array}\right]$$

報酬行列

報酬の期待値は1×nの行列になる

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \Pr(s_i \mid s_1) R(s_1, s_i) \\ \sum_{i=1}^{n} \Pr(s_i \mid s_2) R(s_2, s_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \Pr(s_i \mid s_n) R(s_n, s_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(s_1) \\ R(s_2) \\ \vdots \\ R(s_n) \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{状態S1の報酬の期待値} \\ \leftarrow \text{状態S2の報酬の期待値} \\ \\ \leftarrow \text{状態Snの報酬の期待値} \end{array}$$

【報酬合計の期待値】 ＝平均訪問回数×各状態の報酬の期待値

つまり平均訪問回数を表す基本行列 Mに報酬行列Rをかける

$\boxed{}$＝ 各状態からスタートして吸収状態に陥るまでに得る報酬合計の期待値になる。

吸収的マルコフ過程の極限:報酬合計の計算

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}^t = \left[\begin{array}{c|c}\mathbf{0} & \mathbf{MU}\\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{array}\right]$$

報酬行列

報酬の期待値は1×nの行列になる

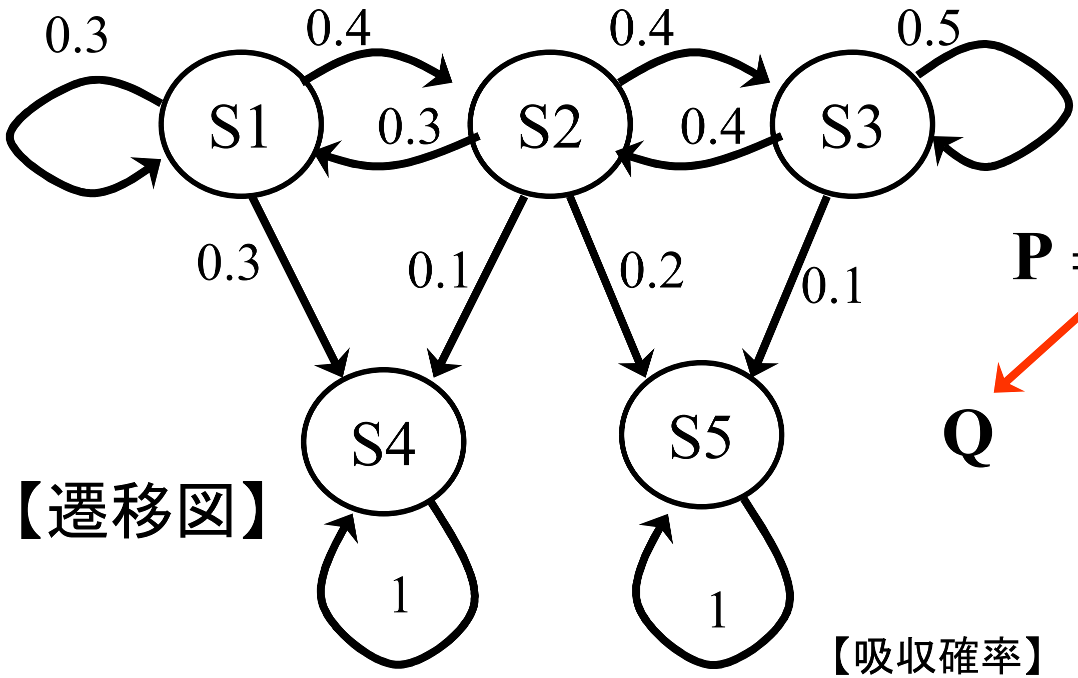
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}\Pr(s_i \mid s_1)R(s_1,s_i) \\ \sum_{i=1}^{n}\Pr(s_i \mid s_2)R(s_2,s_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n}\Pr(s_i \mid s_n)R(s_n,s_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(s_1) \\ R(s_2) \\ \vdots \\ R(s_n) \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{状態S1の報酬の期待値} \\ \leftarrow \text{状態S2の報酬の期待値} \\ \\ \leftarrow \text{状態Snの報酬の期待値} \end{array}$$

【報酬合計の期待値】＝平均訪問回数×各状態の報酬の期待値

つまり平均訪問回数を表す基本行列 Mに報酬行列Rをかける

$\boxed{\mathrm{MR}}$＝ 各状態からスタートして吸収状態に陥るまでに得る報酬合計の期待値になる。

〔計算例〕



【遷移図】

【推移確率行列】

$$
\mathbf{P} = \left[\begin{array}{ccc|cc}
0.3 & 0.4 & 0 & 0.3 & 0 \\
0.3 & 0 & 0.4 & 0.1 & 0.2 \\
0 & 0.4 & 0.5 & 0 & 0.1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

$\mathbf{Q}$ 　$\mathbf{U}$

【吸収確率】

$$
\mathbf{B} = \mathbf{MU} = \begin{bmatrix} 0.69 & 0.31 \\ 0.45 & 0.55 \\ 0.36 & \boxed{0.64} \end{bmatrix}
$$

S3 からスタートして吸収状態 S5 に陥る確率

【基本行列】

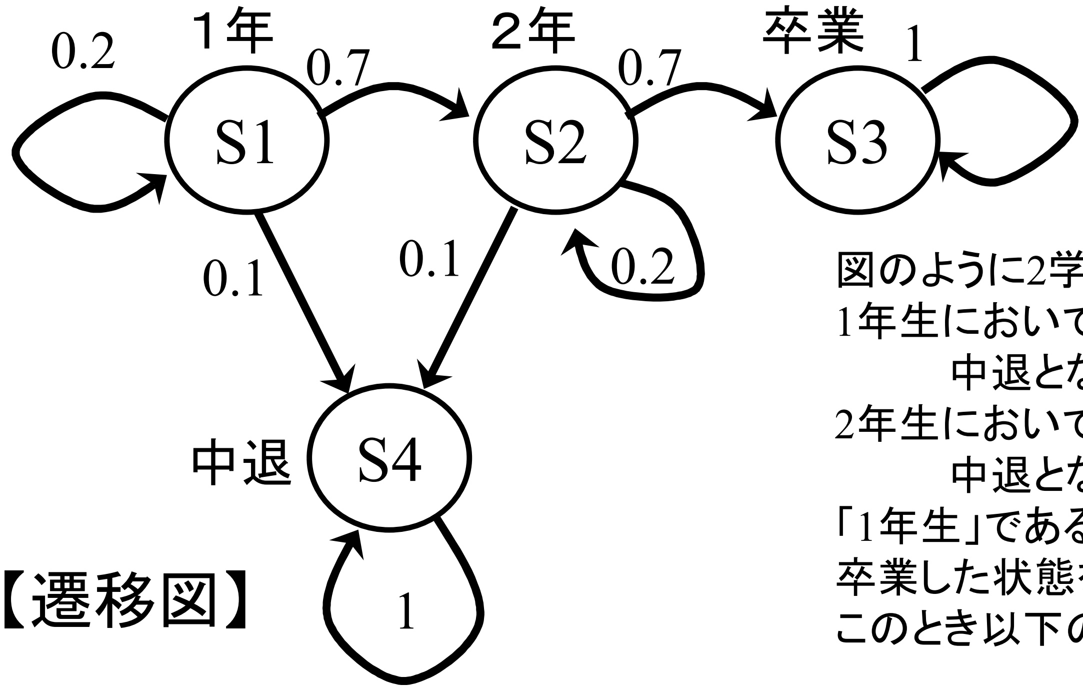
$$
\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{bmatrix} 1.91 & 1.12 & 0.90 \\ \boxed{0.84} & 1.97 & 1.57 \\ 0.67 & 1.57 & 3.26 \end{bmatrix}
$$

S2 からスタートして吸収状態に陥るまでに S1 を訪問する平均回数

【平均吸収時間】

$$
\mathbf{Mg} = \begin{bmatrix} 1.91 & 1.12 & 0.90 \\ 0.84 & 1.97 & 1.57 \\ 0.67 & 1.57 & 3.26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.93 \\ \boxed{4.38} \\ 5.50 \end{bmatrix}
$$

S2 からスタートして吸収状態に陥るまでの時間



【遷移図】

【練習問題】

図のように2学年から構成される学校がある。
1年生において、留年（次年度も1年生）となる確率は 0.2、
中退となる確率は 0.1、2年生へ進級する確率 0.7
2年生において、留年（次年度も2年生）となる確率は 0.2、
中退となる確率は 0.1、卒業となる確率は0.7
「1年生」である状態を S1, 「2年生」である状態を S2、
卒業した状態を S3、中退を S4 とする。
このとき以下の問に答えよ.

【問１】 マルコフ過程でモデル化し、状態遷移行列を示せ。

【問２】 1年生からスタートした学生が卒業および退学した状態になるまでの
平均年数（平均遷移ステップ数）を計算せよ。

【問３】 この学校では設備等の都合により 1, 2年生合わせた学生数の定員が100名となっており、なるべく学生の総数が定員に近いことが望ましい。このとき、毎年新1年生を何名入学させるべきか計算せよ。

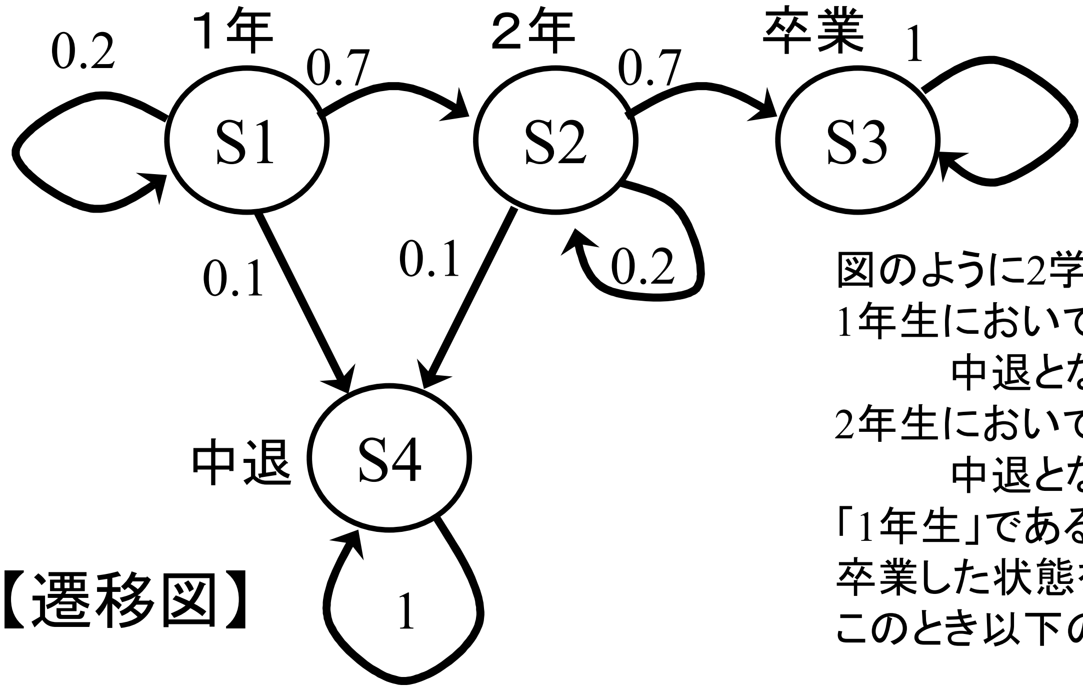
【復習】　2x2行列の逆行列の公式

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

単位行列

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



【遷移図】

【練習問題】

図のように2学年から構成される学校がある。
1年生において、留年（次年度も1年生）となる確率は 0.2、
中退となる確率は 0.1、2年生へ進級する確率 0.7
2年生において、留年（次年度も2年生）となる確率は 0.2、
中退となる確率は 0.1、卒業となる確率は0.7
「1年生」である状態を S1, 「2年生」である状態を S2、
卒業した状態を S3、中退を S4 とする。
このとき以下の問に答えよ.

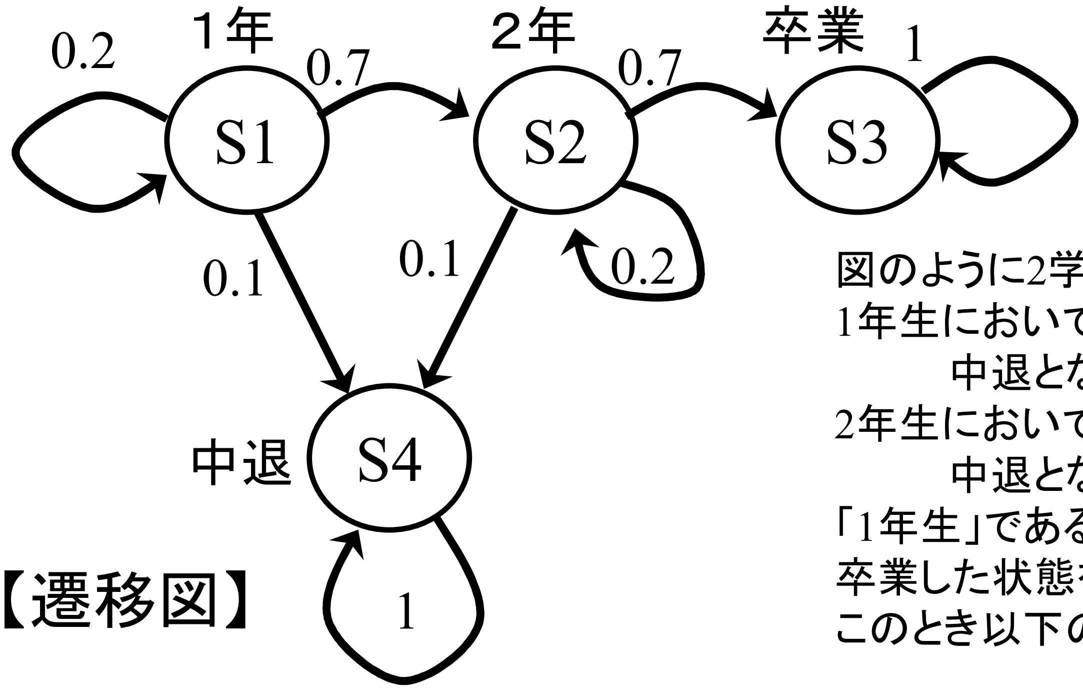
【問1】 マルコフ過程でモデル化し、状態遷移行列を示せ。

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \boxed{\begin{matrix}0.2 & 0.7\\ 0 & 0.2\end{matrix}} & & \boxed{\begin{matrix}0 & 0.1\\ 0.7 & 0.1\end{matrix}} & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Q **U**

【問2】 1年生からスタートした学生が卒業または退学した状態になるまでの
平均年数（平均遷移ステップ数）を計算せよ。

【問3】 この学校では設備等の都合により 1，2年生合わせた学生数の定員が100名となっており、なるべく学生の総数が定員に近いことが望ましい。このとき、毎年新1年生を何名入学させるべきか計算せよ。



【遷移図】

【練習問題】

図のように2学年から構成される学校がある。
1年生において、留年（次年度も1年生）となる確率は 0.2、
中退となる確率は 0.1、2年生へ進級する確率 0.7
2年生において、留年（次年度も2年生）となる確率は 0.2、
中退となる確率は 0.1、卒業となる確率は0.7
「1年生」である状態を S1, 「2年生」である状態を S2、
卒業した状態を S3、中退を S4 とする。
このとき以下の問に答えよ.

【問1】 マルコフ過程でモデル化し、状態遷移行列を示せ。

$$\begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix}0.2 & 0.7\\ 0 & 0.2\end{matrix}}^{\mathbf{Q}} & \overbrace{\begin{matrix}0 & 0.1\\ 0.7 & 0.1\end{matrix}}^{\mathbf{U}} \\ \begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix} & \begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\end{bmatrix}$$

【問2】 1年生からスタートした学生が卒業または退学した状態になるまでの平均年数（平均遷移ステップ数）を計算せよ。

基本行列

$$\mathbf{M}=(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}=\left[\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0.2 & 0.7\\ 0 & 0.2\end{bmatrix}\right]^{-1}=\begin{bmatrix}5/4 & 35/32\\ 0 & 5/4\end{bmatrix}$$

1年からスタートして吸収状態へ陥るまでの平均ステップ

よって $\begin{bmatrix}5/4 & 35/32\\ 0 & 5/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boxed{75/32}\\ 5/4\end{bmatrix}$

【問3】 この学校では設備等の都合により 1, 2年生合わせた学生数の定員が100名となっており、なるべく学生の総数が定員に近いことが望ましい。このとき、毎年新1年生を何名入学させるべきか計算せよ。

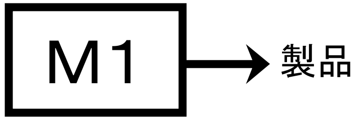
1年からスタートして卒業または退学するまでの平均年数＝75／32

毎年 x 人が1年生として入ってくると、在学生の人数は $\dfrac{75}{32}x$　　これを 100 にしたい

$$\frac{75}{32}x = 100 \qquad x = \frac{3200}{75} = 42.666$$

よって入学者は 42～43名とすべき

【演習問題】2020.01.27



学籍番号
氏　名 ________________

●機械M1は「稼働」「不調」「故障」の３状態を有する.
●機械の状態遷移は，一定時間間隔で離散的に起きる.
●機械が「稼動」状態にあるとき、次ステップでは確率 0.6 で稼動状態を継続，
確率 0.3 で「不調」状態へ遷移，確率 0.1 で故障する
●機械が「不調」状態にあるとき、次ステップでは確率 0.4 で稼動状態へ復帰，
確率 0.4 で「不調」状態を継続，確率 0.2 で故障する
●機械が「故障」状態に陥ると、そこから抜け出せない
●機械が「稼動」状態にあるとき，次ステップの状態に関係なく 9万円の利益がある.
●機械が「不調」状態にあるとき，次ステップの状態に関係なく －6万円の利益がある.
●機械が「故障」状態にあるとき，利益は 0

「稼働」を状態１，「不調」を状態２，「故障」を状態３として状態遷移マトリクスを作り，以下を計算せよ。

１．状態１からスタートして吸収状態へ陥るまでに状態１を訪問する平均回数
状態１からスタートして吸収状態へ陥るまでに状態2を訪問する平均回数
状態2からスタートして吸収状態へ陥るまでに状態1を訪問する平均回数
状態２からスタートして吸収状態へ陥るまでに状態2を訪問する平均回数

２．各状態からスタートして故障状態へ陥るまでの平均ステップ数

３．各状態からスタートした場合の報酬合計の期待値

状態1からスタートして
吸収状態へ陥るまでに
状態1を訪問する平均回数

状態1からスタートして
吸収状態へ陥るまでに
状態2を訪問する平均回数

$$\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 5/2 \\ 10/3 & 10/3 \end{bmatrix}$$

状態2からスタートして
吸収状態へ陥るまでに
状態1を訪問する平均回数

状態2からスタートして
吸収状態へ陥るまでに
状態2を訪問する平均回数

$$\mathbf{Mg} = \begin{bmatrix} 5 & 5/2 \\ 10/3 & 10/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15/2 \\ 20/3 \end{bmatrix}$$

状態1からスタートして故障状態へ
陥るまでの平均ステップ数

状態2からスタートして故障状態へ
陥るまでの平均ステップ数

$$\mathbf{MR} = \begin{bmatrix} 5 & 5/2 \\ 10/3 & 10/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \end{bmatrix}$$

状態1からスタートした
場合の報酬合計の期待値

状態2からスタートした
場合の報酬合計の期待値