

前回の続き

# 【組合せ最適化問題の解法(1)】 まずこれらの方法で試す

## ●腕ずくの方法 (brute force method) :

コンピュータの高速な計算力に頼って、**起こりうる全ての場合を調べて**、  
その中で最も良いものを選ぶ方法。(列挙法・全数探索とも呼ばれる)

[特徴]

- ◎ 原理が単純でわかりやすい
- ◎ 実行が可能であるならば、必ず最適解が見つかる  
(組合せ最適化問題の解候補は有限な離散集合なので)  
小規模問題では実用的
- × 場合の数が組合せ爆発を起こす場合は実行不能

## ●欲張り法 (greedy method) :

各選択の時点で、**目先の利益が最大**になるよう選び続ける方法

[特徴]

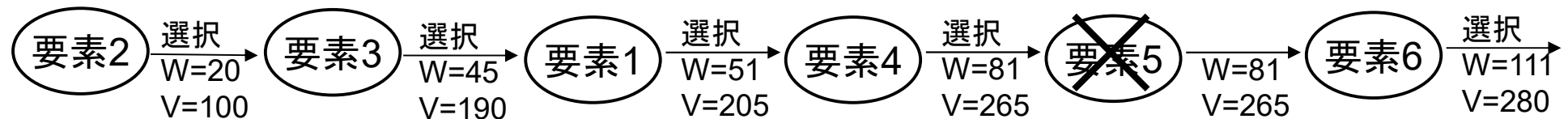
- ◎ 原理が単純で分かりやすい
- × 局所的な目先の最適化を行い続けることが全体の最適化になるとは一般にはいえない...最適解が見つかる保障は一般にはない
- ◎ 多くの場合、最適ではないがそれに近いものが求まる
- ◎ グラフ最短経路探索問題など一部の問題では、最適解が得られる  
(ダイクストラの方法) また、後述の動的計画法とも関連

# 【例】 ナップサック問題に対する欲張り法

ナップサックの容量: 112

要素	1	2	3	4	5	6	7	8
重さ	6	20	25	30	40	30	60	10
価値	15	100	90	60	40	15	10	3
単位重さ あたりの 価値	2.5	5	3.6	2	1	0.5	0.166	0.3

- (1) 要素を**単位重さあたりの価値の高い順に並べ替える**。  $i = 1$  とする。
- (2) もし  $i$  番目の要素を選択したら、選択した要素全体の重さがナップサック容量を超えない場合はその  $i$  番目の要素を選択する。さもなければその要素を選択しない。
- (3)  $i$  が要素数  $n$  と等しくなったら終了。さもなければ  $i$  を  $i+1$  として(2)へもどる。

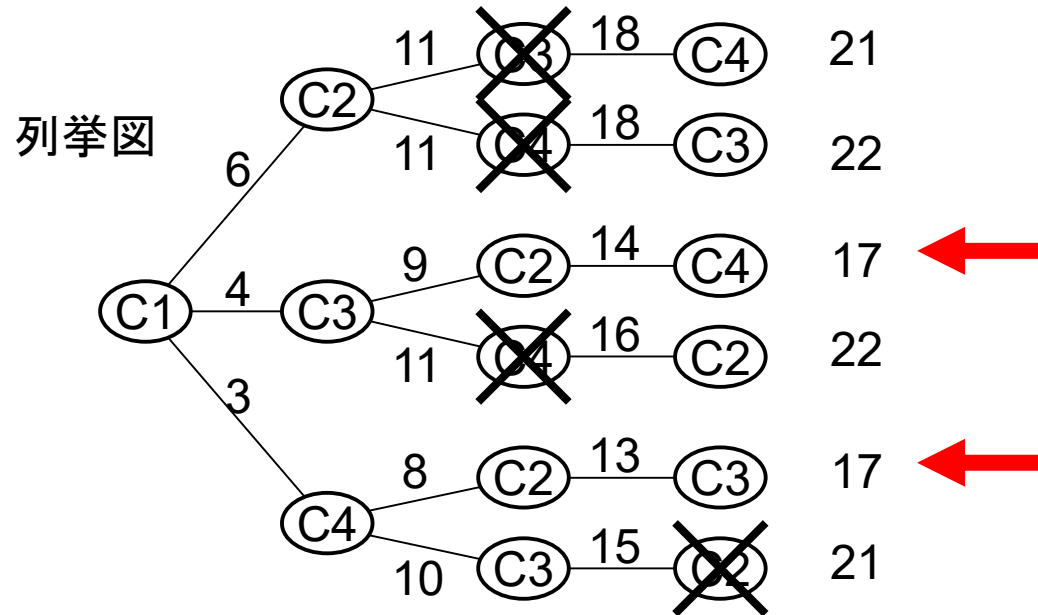
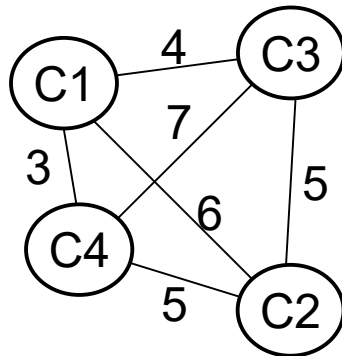


要素数10, 容量100, 価値上限100の問題で欲張り法により最適解を得る割合16~17% だが最適解と欲張り法の解の違いは1割程度

# 【組合せ最適化の解法(2)】 分枝限定法

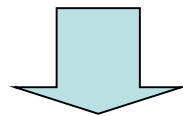
全ての解候補を列挙して、その中で評価値最大(最小)のものを見出す:**腕ずくの方法**

例) 4都市TSP



問題の規模が大きくなると、組合せ爆発のため実行不能！そこで...

→ **列挙図の木の生成途中で、**



## 分枝限定法 (branch and bound method)

◎...「腕ずく法」と「欲張り法」の中間的なバランスの良い方法

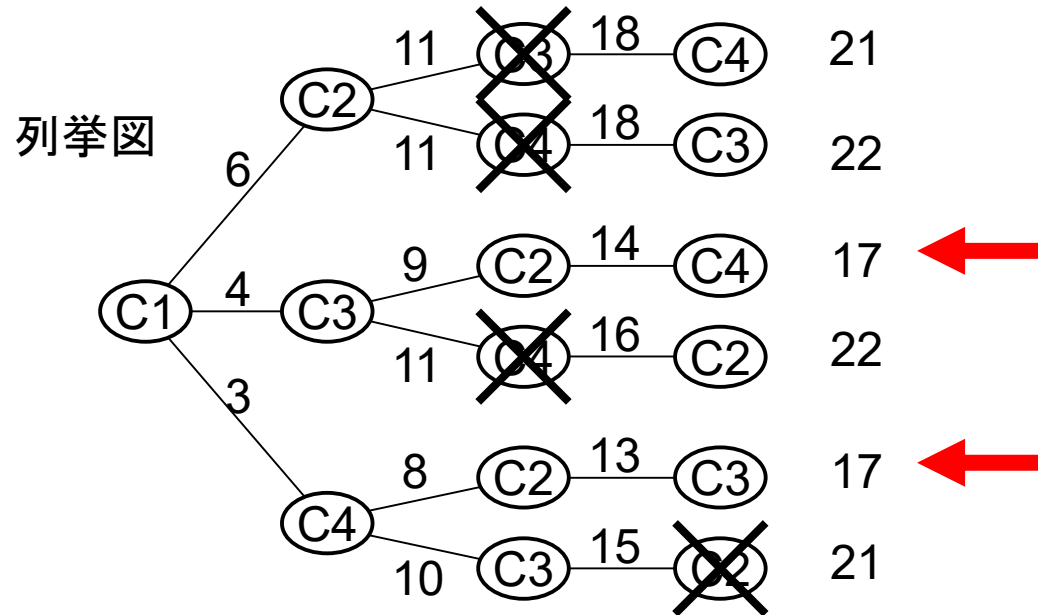
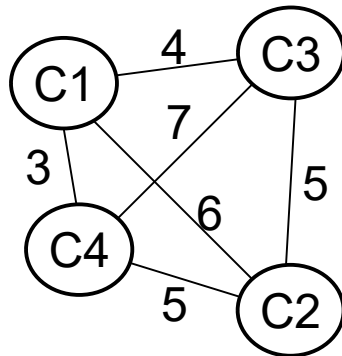
△...**解の可能性が無い枝だけを刈れば最適解が保障**されるが、

大規模問題では実行不能になるので、最適解をあきらめて可能性の小さい枝を刈ることが多い

# 【組合せ最適化の解法(2)】 分枝限定法

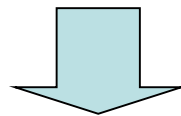
全ての解候補を列挙して、その中で評価値最大(最小)のものを見出す: **腕ずくの方法**

例) 4都市TSP



問題の規模が大きくなると、組合せ爆発のため実行不能！そこで...

→ **列挙図の木の生成途中で、解となる可能性の無い(または小さい)枝を刈る**



## 分枝限定法 (branch and bound method)

◎...「腕ずく法」と「欲張り法」の中間的なバランスの良い方法

△...**解の可能性が無い枝だけを刈れば最適解が保障**されるが、

大規模問題では実行不能になるので、最適解をあきらめて可能性の小さい枝を刈ることが多い

# 【例】 ナップサック問題に対する分枝限定法

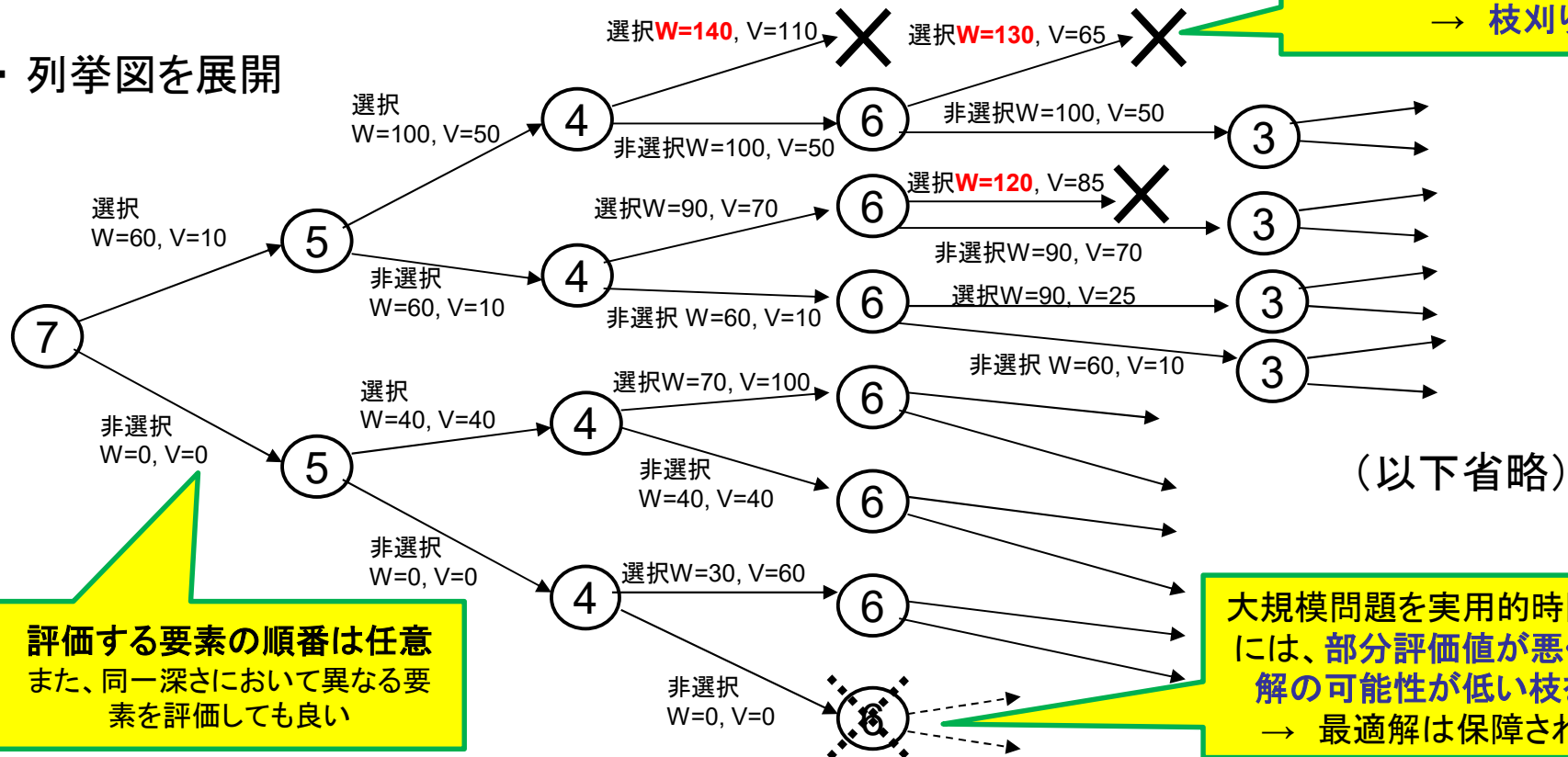
ナップサックの容量  $W_{\max} = 112$

要素	1	2	3	4	5	6	7	8
重さ	6	20	25	30	40	30	60	10
価値	15	100	90	60	40	15	10	3

・ 腕づくの方法(全数探索)の場合、検討する解候補数は  $2^8 = 256$

これ以後、解の可能性無し  
→ 枝刈り

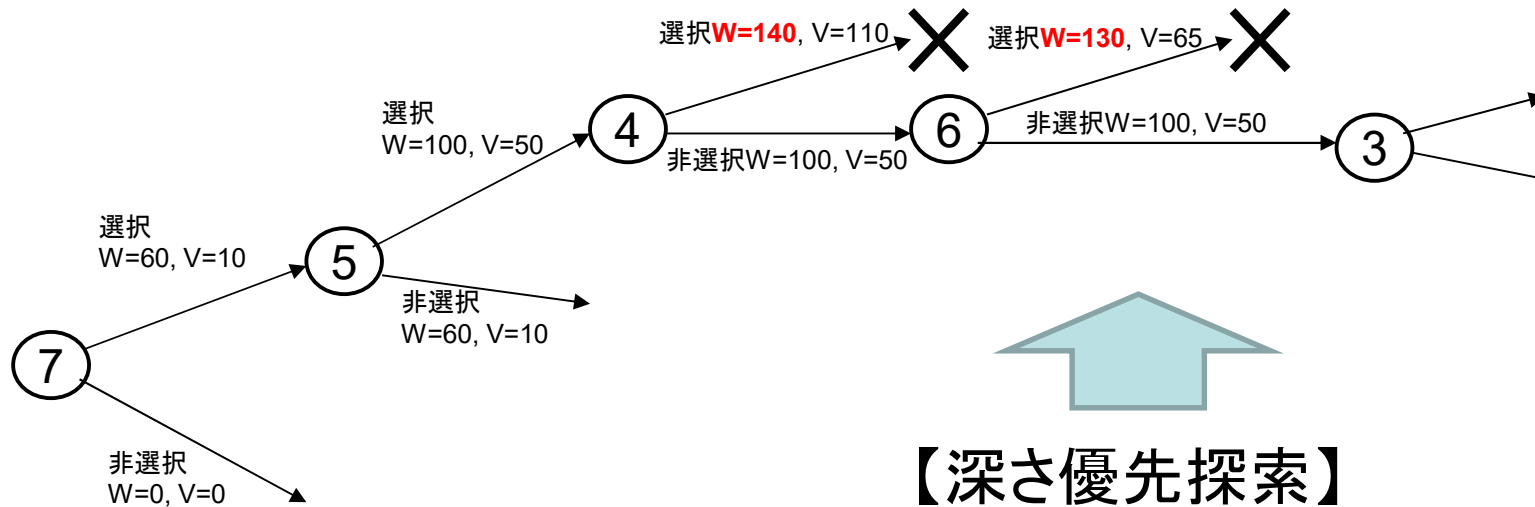
・ 列挙図を展開



評価する要素の順番は任意  
また、同一深さにおいて異なる要素を評価しても良い

大規模問題を実用的時間で解くには、部分評価値が悪く、最適解の可能性が低い枝を刈る  
→ 最適解は保障されない

# 分枝限定法における枝の展開:「深さ優先探索」と「幅優先探索」

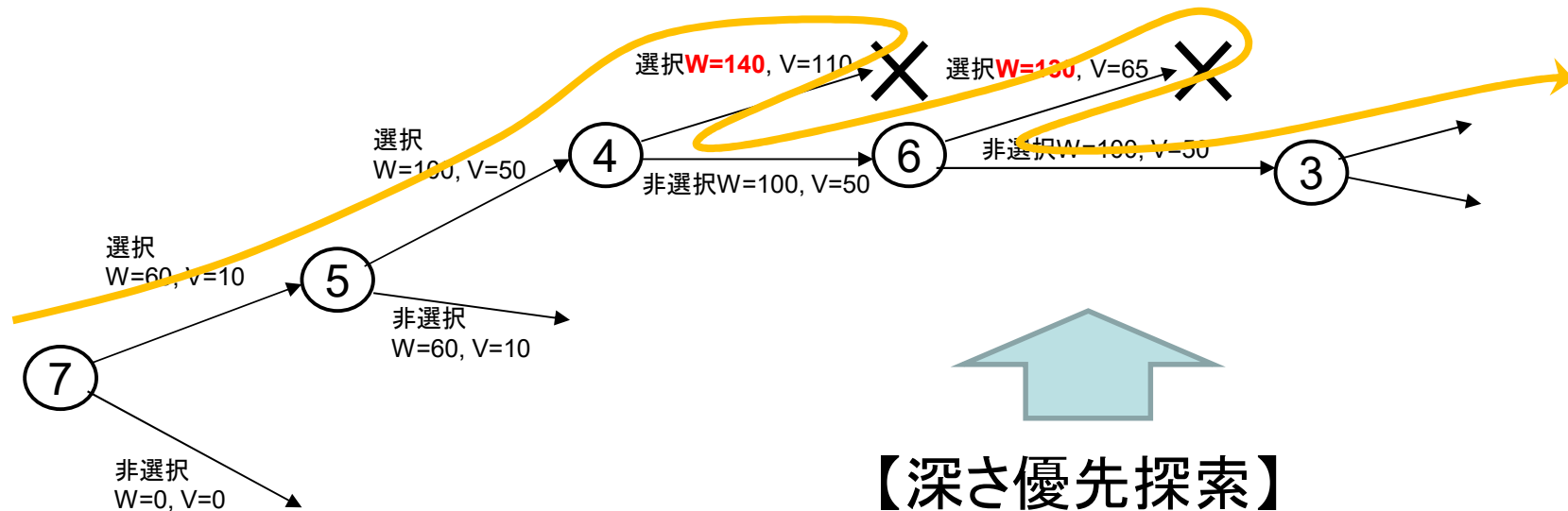


探索の各時点で、最大の深さの部分問題から優先的に探索する

## 特徴

- 実行可能解を素早く見つける
- 探索の過程で必要となる記憶容量は小さい

# 分枝限定法における枝の展開:「深さ優先探索」と「幅優先探索」



探索の各時点で、最大の深さの部分問題から優先的に探索する

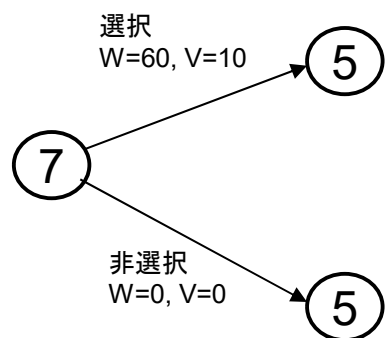
## 特徴

- 実行可能解を素早く見つける
- 探索の過程で必要となる記憶容量は小さい



# 分枝限定法における枝の展開:「深さ優先探索」と「幅優先探索」

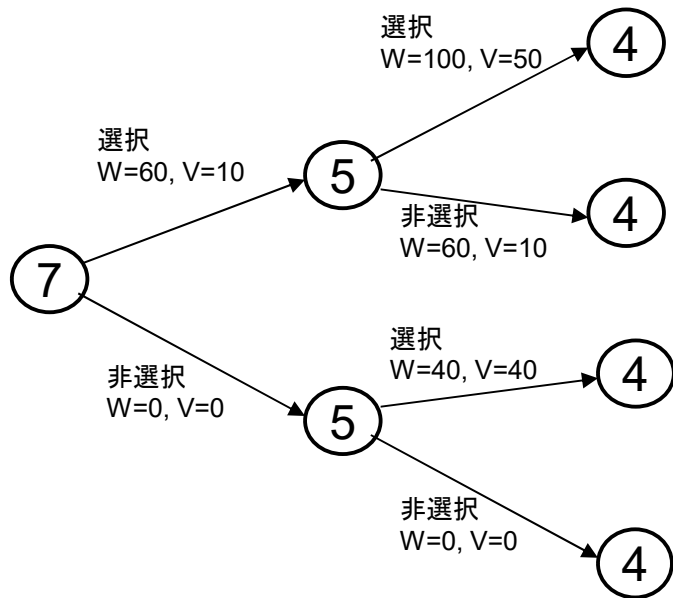
## 【幅優先探索】



探索の各時点で、  
深さが最小の部分問題  
から優先的に探索する

# 分枝限定法における枝の展開:「深さ優先探索」と「幅優先探索」

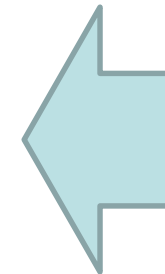
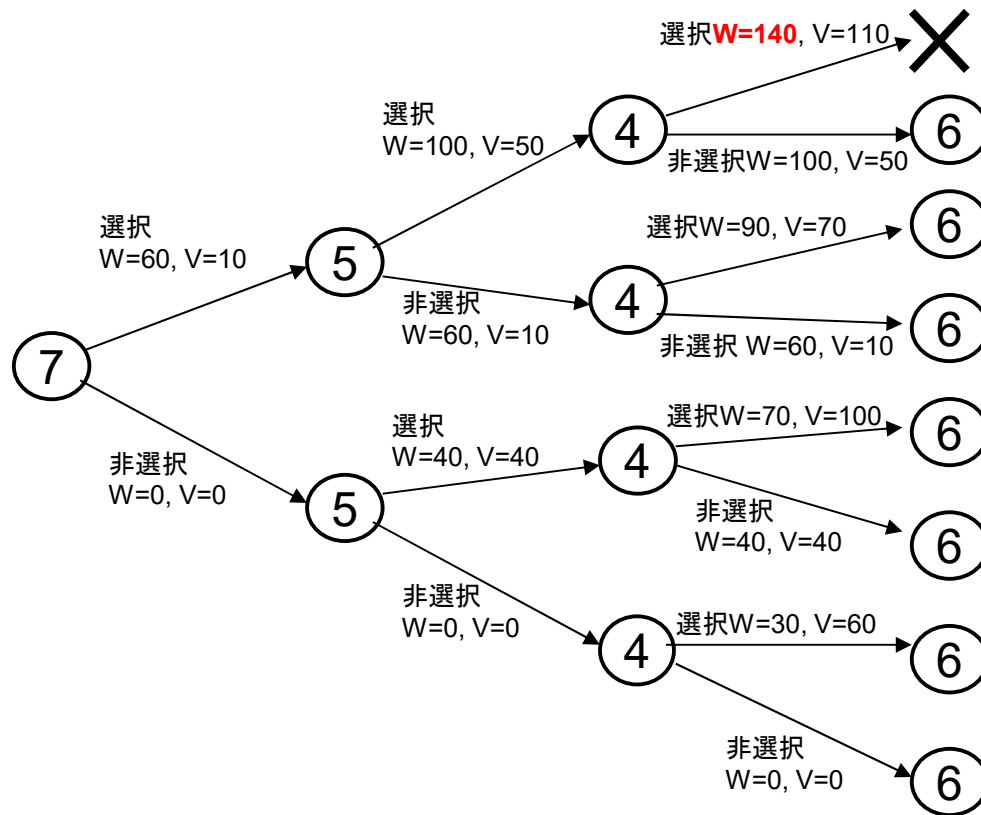
## 【幅優先探索】



探索の各時点で、  
深さが最小の部分問題  
から優先的に探索する

# 分枝限定法における枝の展開:「深さ優先探索」と「幅優先探索」

## 【幅優先探索】



探索の各時点で、  
深さが最小の部分問題  
から優先的に探索する

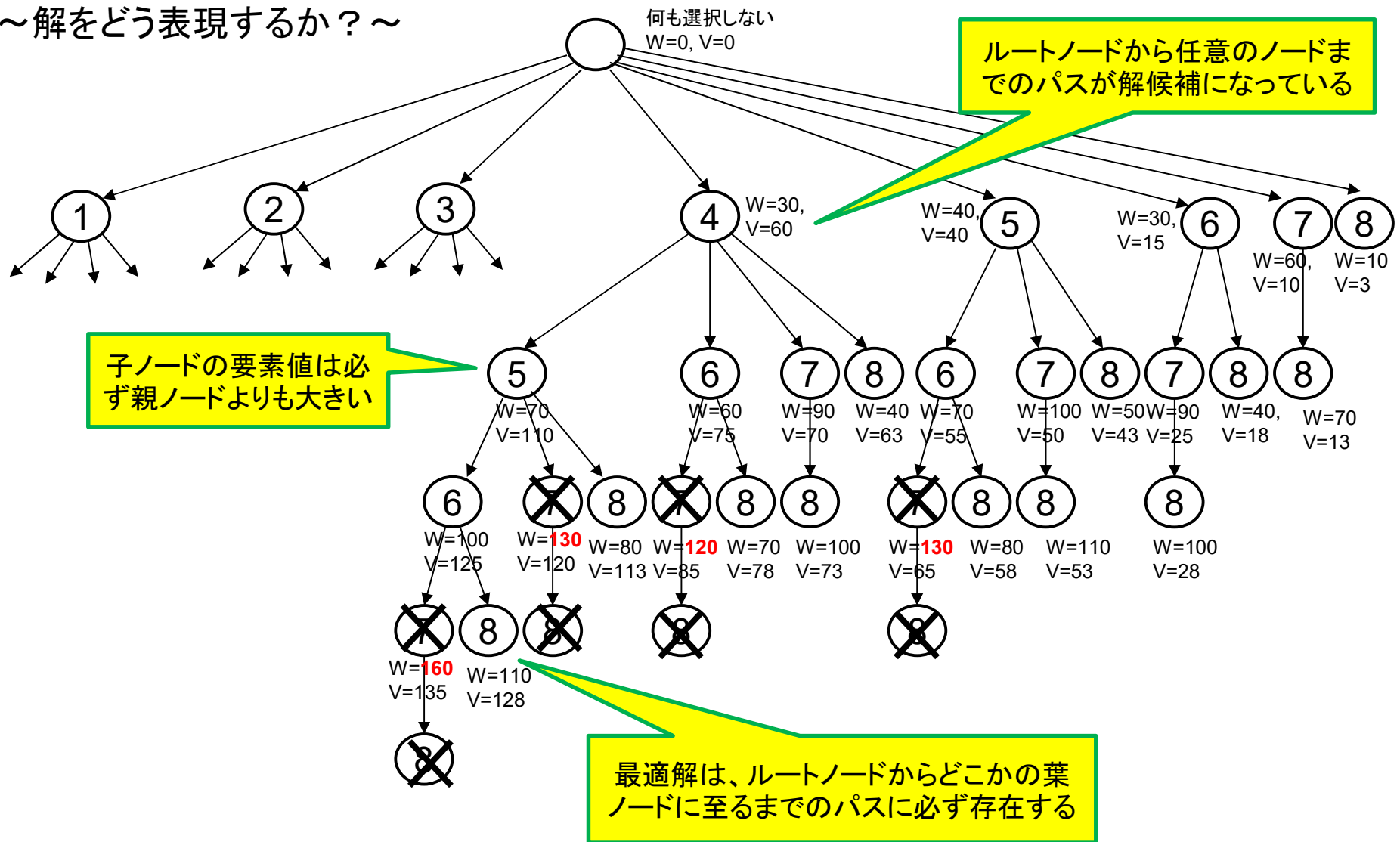
経路探索アルゴリズム「ダイクストラ法」は、  
「深さ=コスト」とした幅優先探索の一種でもある

### 特徴

- **最適解**を素早く見つける
- X 大きな記憶容量を要す

# 分枝限定法における様々な「列挙図」表現

～解をどう表現するか？～



問題に応じて適切な表現を選択・考案せよ

# まとめ

## 組合わせ最適化 と 分枝限定法

### 【分枝限定法とは？】

- 1) 解候補をツリー状の列挙図のように列挙・評価していくが、ツリー生成途中で  
解の可能性の無い(あるいは可能性が低い)枝を刈ることで探索空間を減らす
- 2) 解の可能性の無い枝だけを刈れば最適解を得る

### 【深さ優先探索】 と 【幅優先探索】

- ・分枝限定法における枝の展開方法 ... 深さ優先のほうが省メモリ

### 【解候補および列挙図の表現方法】

- ・問題に応じて(あるいは好みに応じて)適切な表現を選択・考案せよ  
→ 実問題においては、この「表現方法」を見つけることこそエンジニアの仕事

九州大学 工学部地球環境工学科  
船舶海洋システム工学コース

システム設計工学（担当：木村）

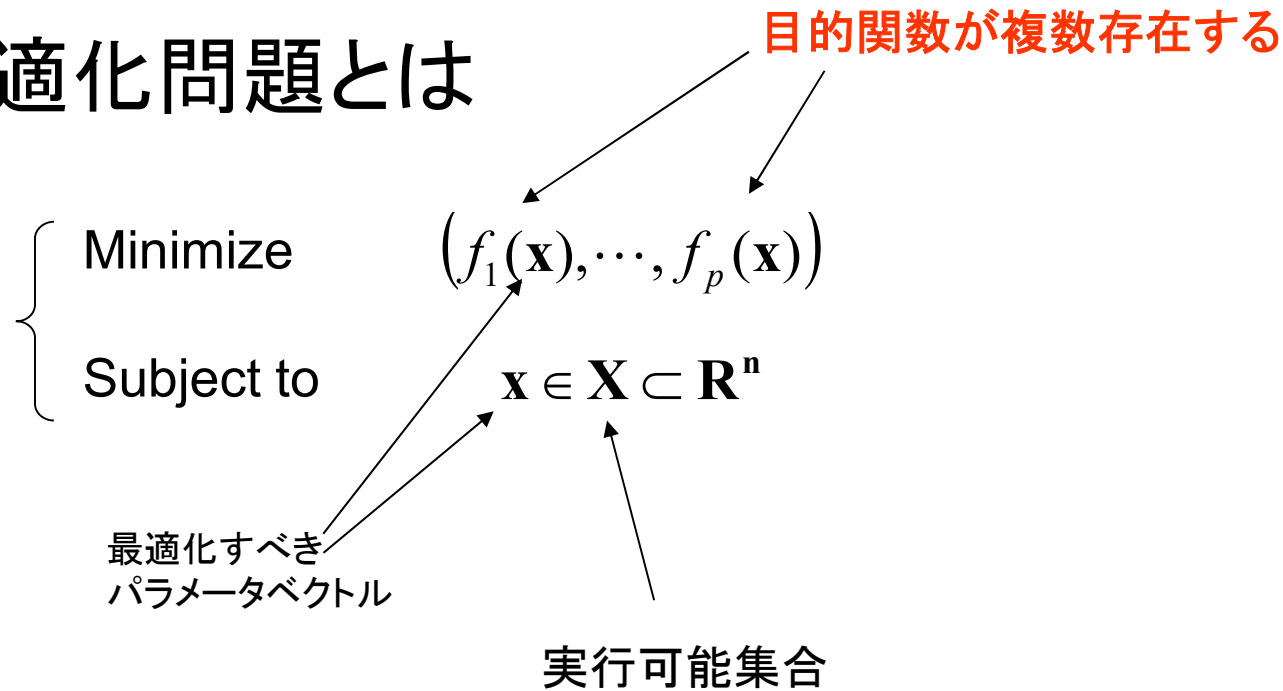
(8) 遺伝的アルゴリズムによる  
多目的最適化(**MOGA**)

場所： 船1講義室

授業の資料等は

<http://sysplan.nams.kyushu-u.ac.jp/gen/index.html>

# 多目的最適化問題とは



## 実際の設計問題のほとんどは多目的最適化になっている

設計案の評価項目が複数あり、それらを単純に足し合わせることはできず、しかもトレードオフ比が一意に決められない問題

例1) 配管設計問題: 設計変数 = 管の配置、目的関数 = 管路長・操作性・メンテナンス性

例2) レンズ系設計問題: 設計変数 = レンズ曲率、目的関数 = ピント・歪曲・色収差

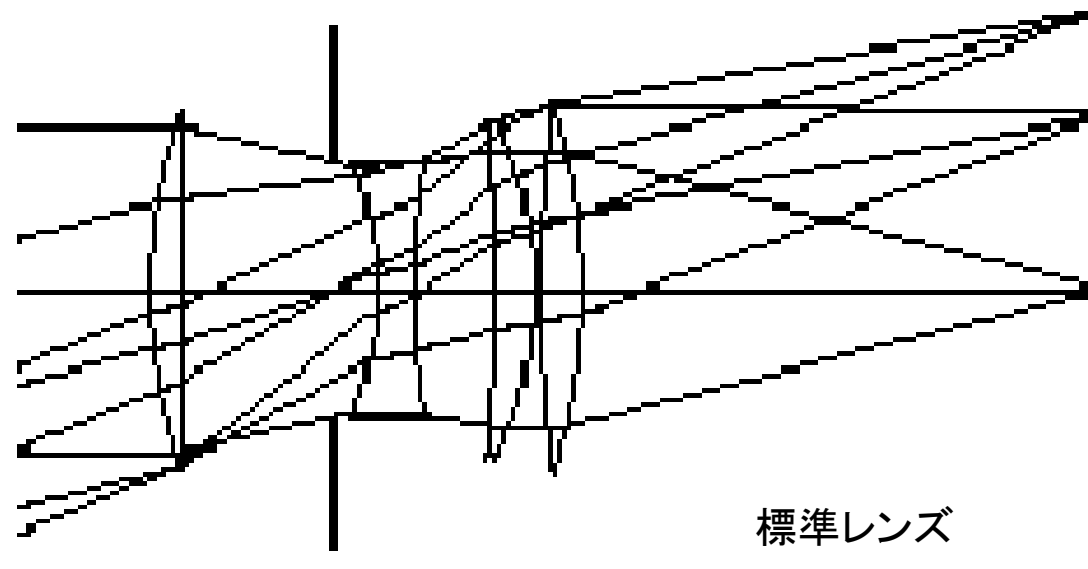
### 【準備】

$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)^T$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_p)^T \in \mathbf{R}^p$  のベクトルに対し、以下の不等号を定義:

$$\mathbf{a} \leq \mathbf{b} \xleftrightarrow{\text{def}} a_i \leq b_i, \quad \forall i = 1, \dots, p_i \quad \text{かつ} \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{b}$$

# 多目的最適化の例: レンズ系設計問題

例) 4枚組み  
レンズ系



● レンズ系を特徴付けるパラメータ:

各レンズの曲率、レンズ間距離など(数十個) → 設計変数  $\mathbf{x}$

● レンズ系の評価:

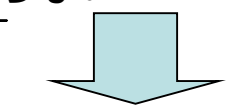
(1) 歪曲 (distortion)  $f_1$

(2) 焦点 (focus)  $f_2$

(3) 色収差 (色のにじみ)  $f_3$

(4) その他 (像の明るさ、製造コスト、丈夫さなど)

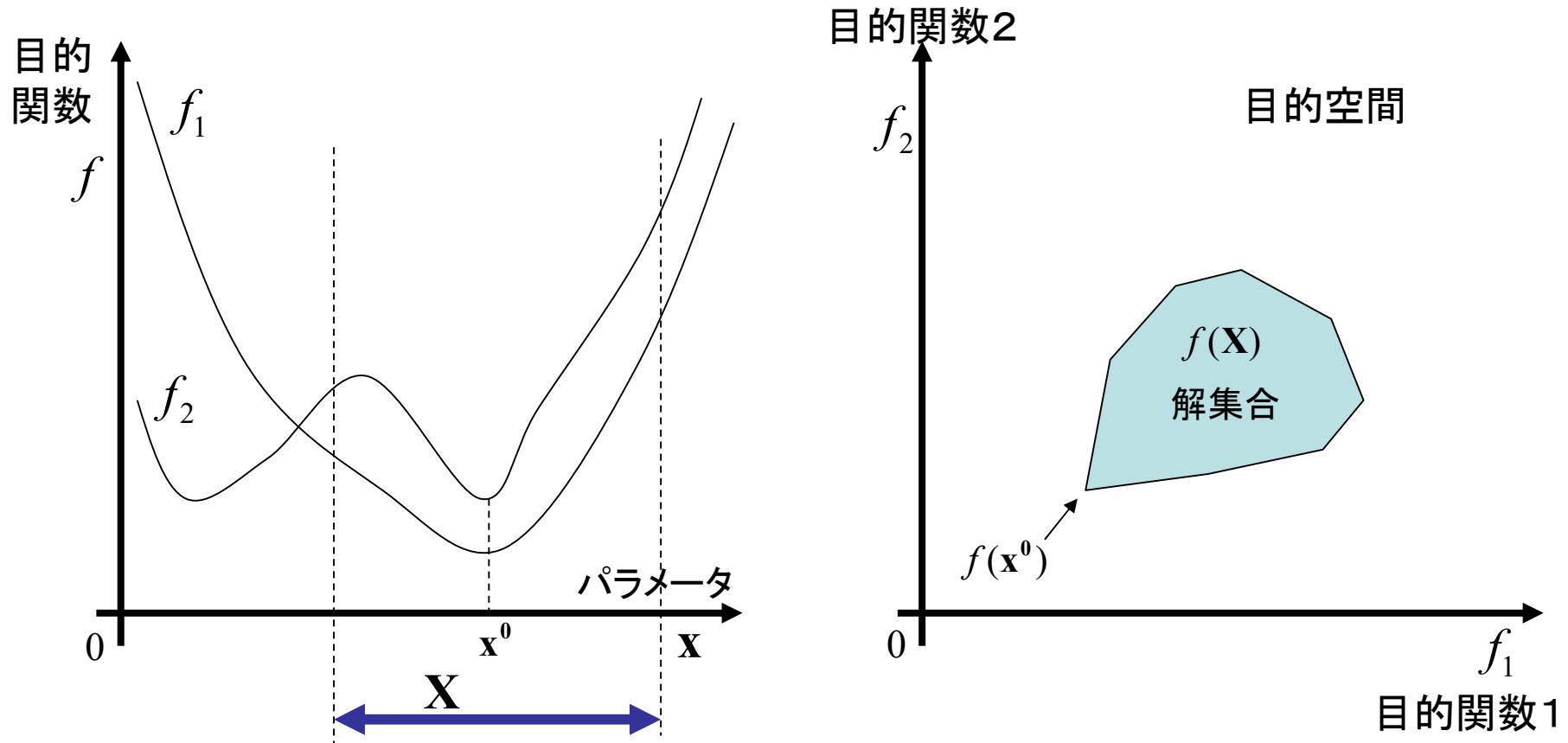
同時に多様な  
評価を満足さ  
せなければな  
らない



多目的



# 多目的最適化問題の完全最適解

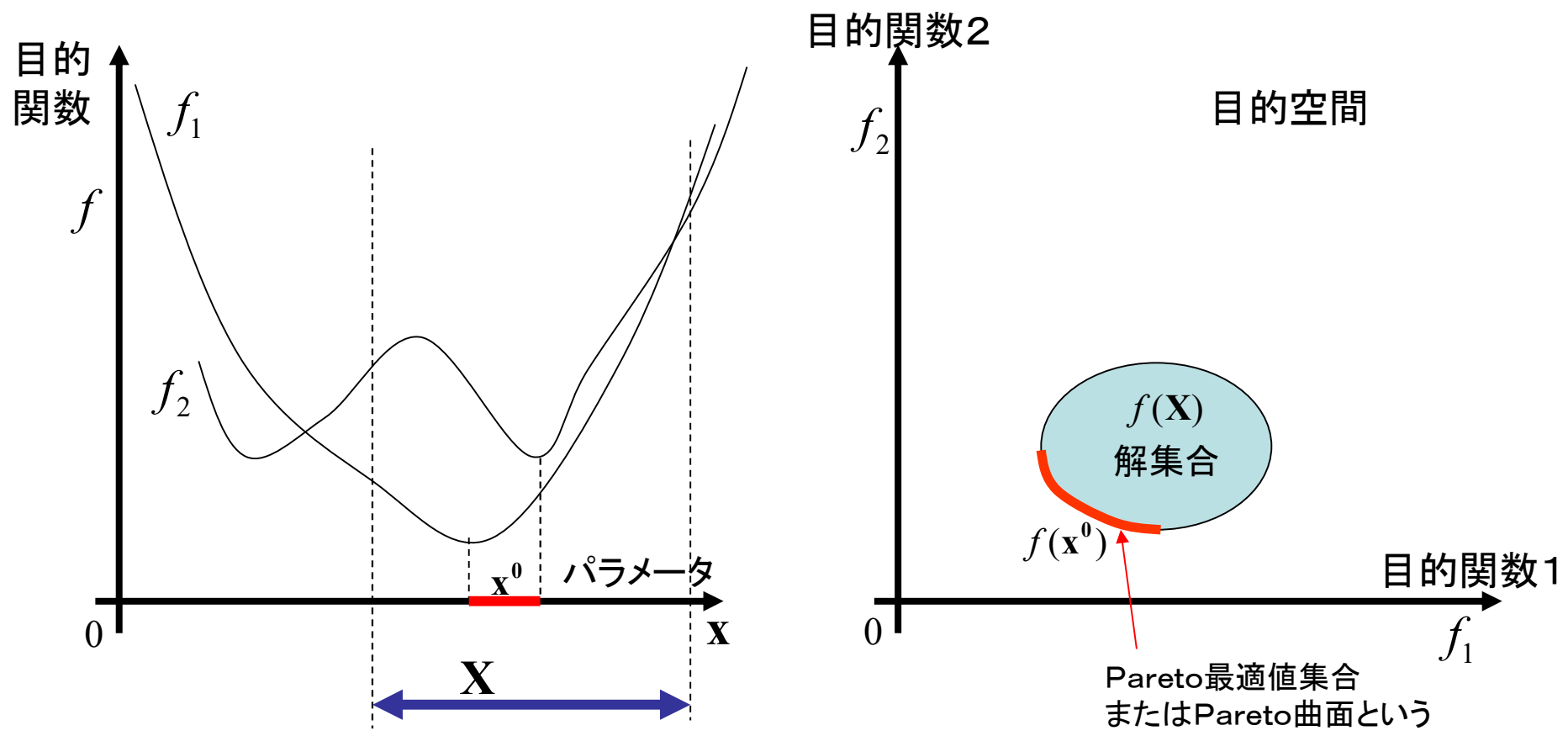


【定義】 多目的最適化問題(P)において、 $x^0 \in X$  が以下の条件を満足するとき、 $x^0$ を(P)の**完全最適解**という。

$$\forall x \in X: f(x^0) \leq f(x)$$

ただし、完全最適解が存在するケースは、実際には稀

# 多目的最適化問題のパレート解集合

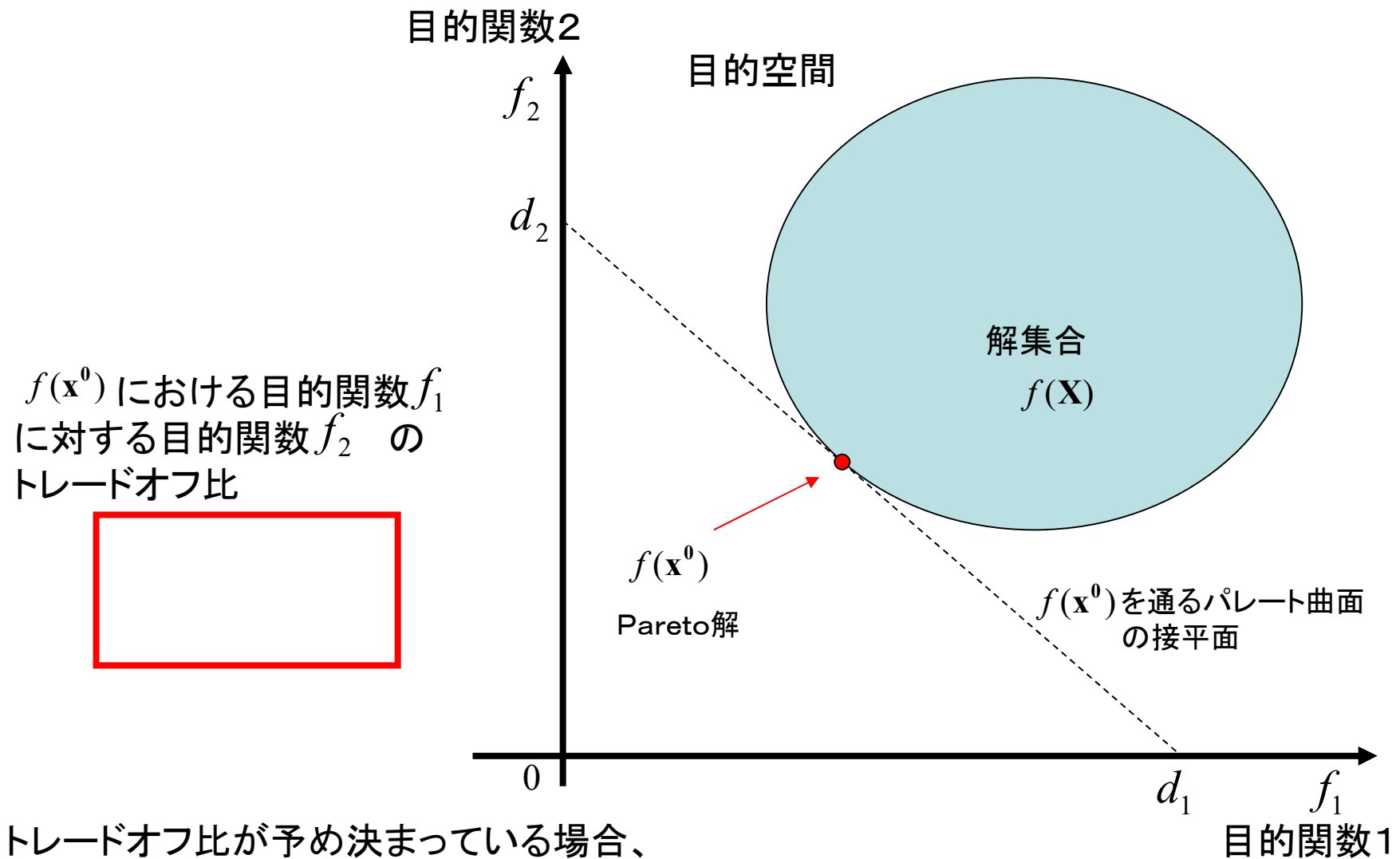


【定義】 多目的最適化問題(P)において、 $x^0 \in X$  が以下の条件を満足するとき、 $x^0$  を(P)のPareto(最適)解あるいは非劣解という。

「存在しない」を意味する  $\nexists x \in X: f(x) \leq f(x^0)$

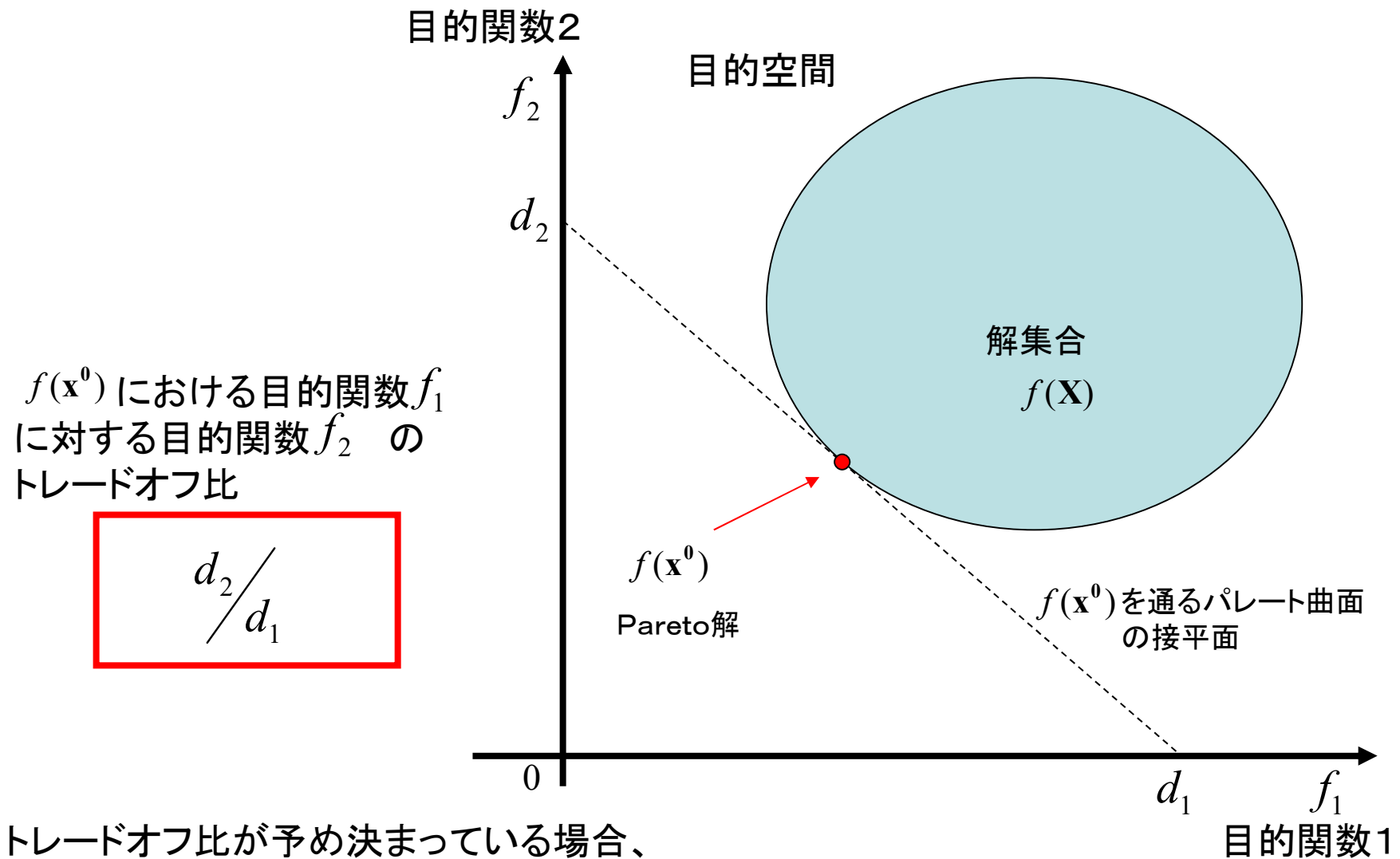
つまり、最適解は一般に無数に存在しうる！

# パレート解のトレードオフ比



トレードオフ比が予め決まっている場合、  
目的関数がただ1つの(単目的)最適化問題に帰着される。

# パレート解のトレードオフ比

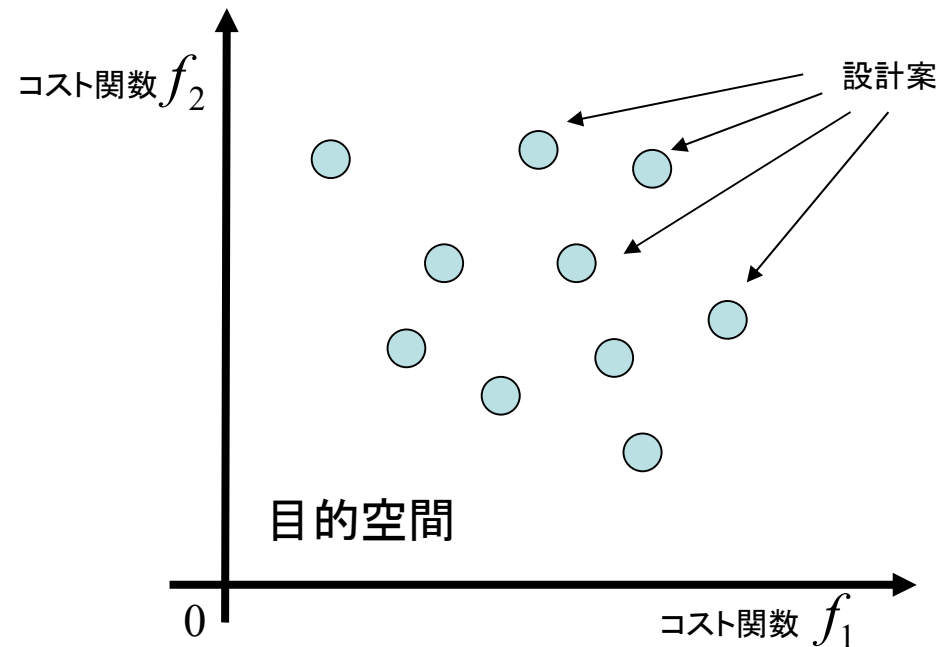


トレードオフ比が予め決まっている場合、  
目的関数がただ1つの(単目的)最適化問題に帰着される。

# ベテラン技術者による設計手順の技能伝承と多目的最適化の考え方

ベテラン技術者が扱っている設計問題が「難しい」と考えられている大きな原因:

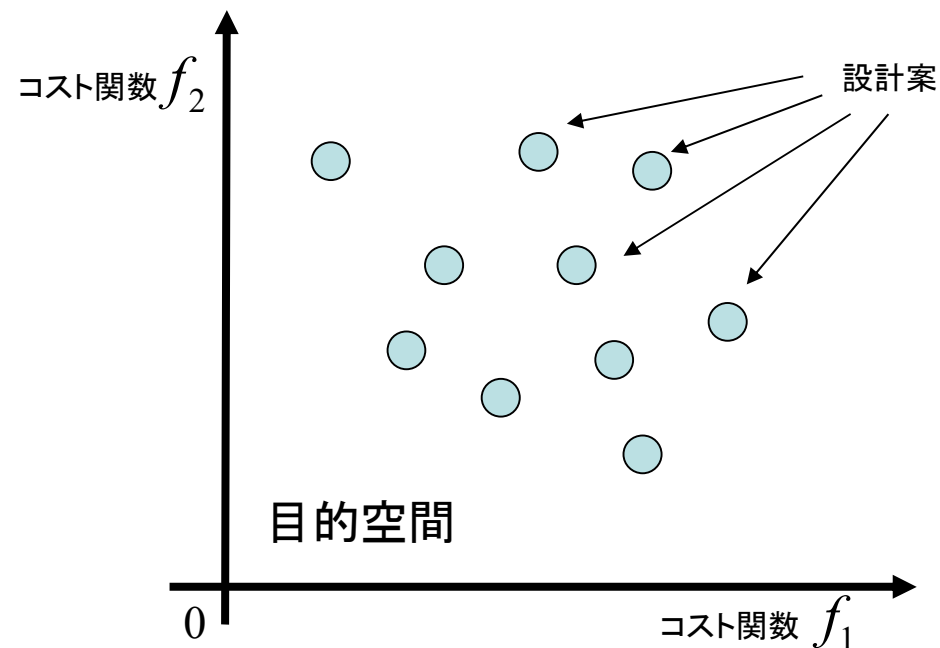
- 1)
- 2)



# ベテラン技術者による設計手順の技能伝承と多目的最適化の考え方

ベテラン技術者が扱っている設計問題が「難しい」と考えられている大きな原因:

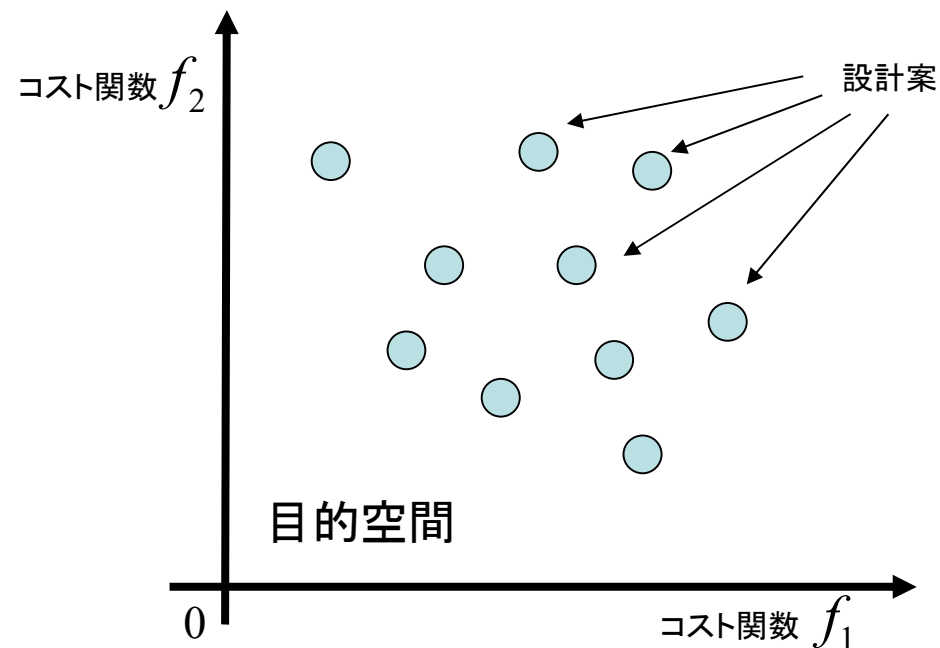
- 1) **実は多目的最適化問題**となっているのだが、設計者がそれに気付いていない
- 2)



# ベテラン技術者による設計手順の技能伝承と多目的最適化の考え方

ベテラン技術者が扱っている設計問題が「難しい」と考えられている大きな原因:

- 1) **実は多目的最適化問題**となっているのだが、設計者がそれに気付いていない
- 2) **評価項目(目的関数)の定式化があいまいで、きちんと数値化されていない**

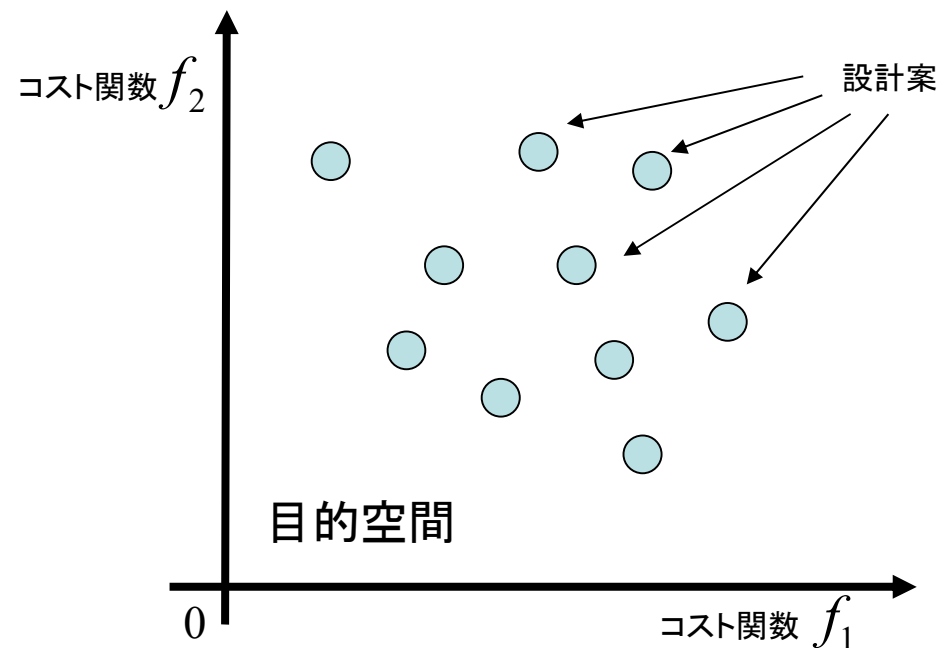


# ベテラン技術者による設計手順の技能伝承と多目的最適化の考え方

ベテラン技術者が扱っている設計問題が「難しい」と考えられている大きな原因:

- 1) **実は多目的最適化問題**となっているのだが、設計者がそれに気付いていない
- 2) **評価項目(目的関数)の定式化があいまいで、きちんと数値化されていない**

→設計案の優劣の判定などはベテラン技術者の勘や経験で行われている**評価を数値化**し設計問題を**多目的最適化で定式化**すれば単純になる



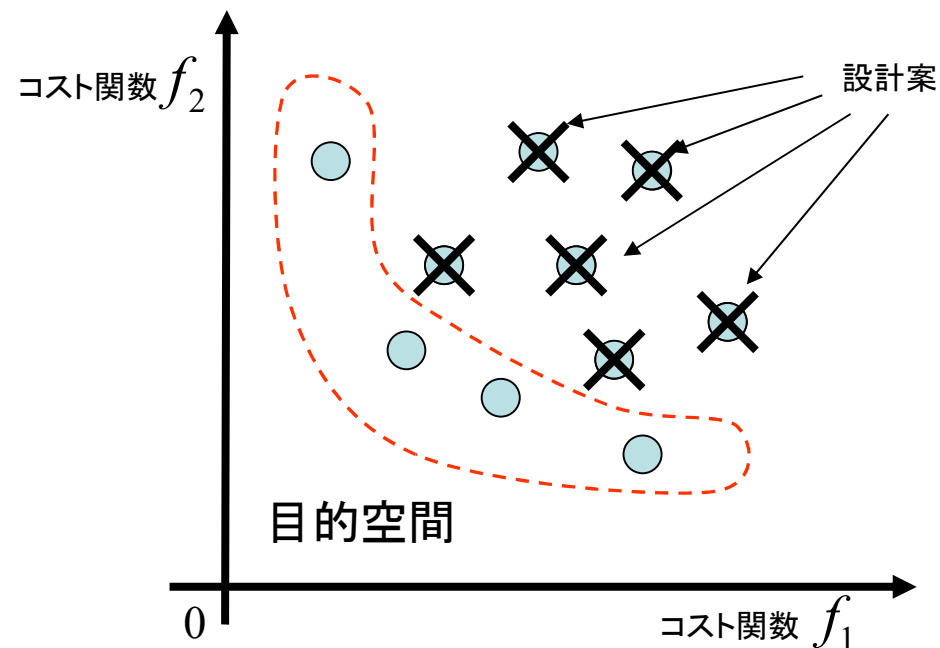


# ベテラン技術者による設計手順の技能伝承と多目的最適化の考え方

ベテラン技術者が扱っている設計問題が「難しい」と考えられている大きな原因:

- 1) **実は多目的最適化問題**となっているのだが、設計者がそれに気付いていない
- 2) **評価項目(目的関数)の定式化があいまいで、きちんと数値化されていない**

→設計案の優劣の判定などはベテラン技術者の勘や経験で行われている**評価を数値化**し設計問題を**多目的最適化で定式化**すれば単純になる

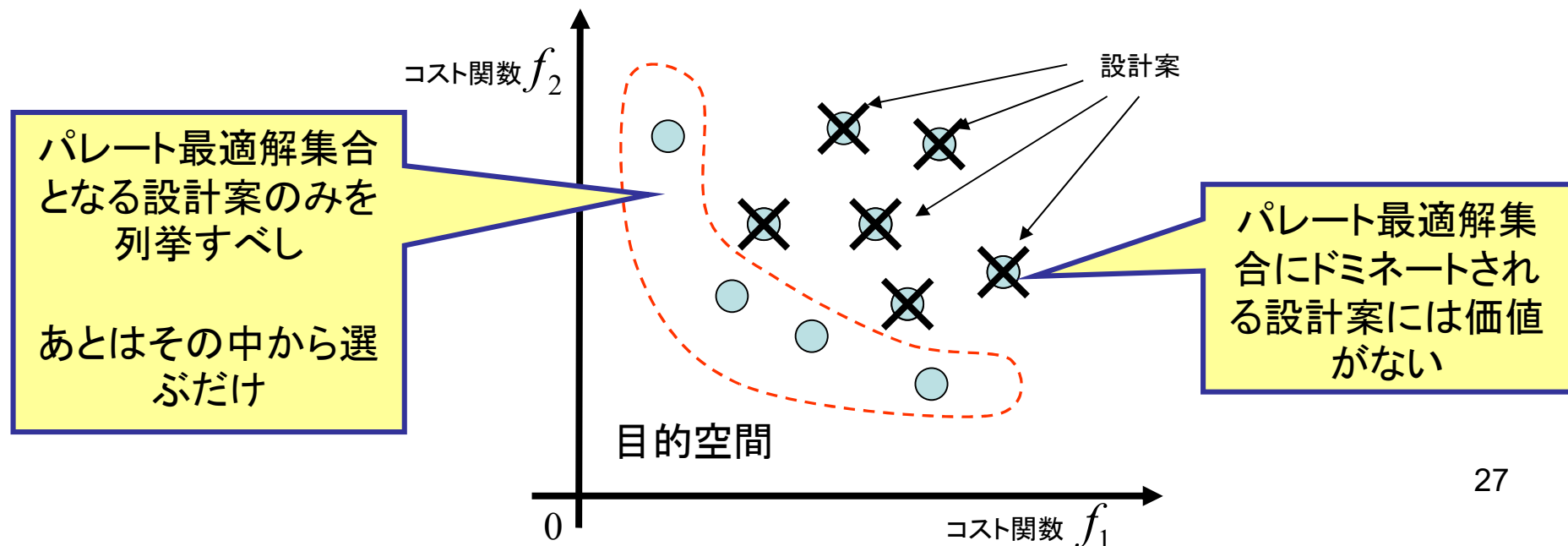


# ベテラン技術者による設計手順の技能伝承と多目的最適化の考え方

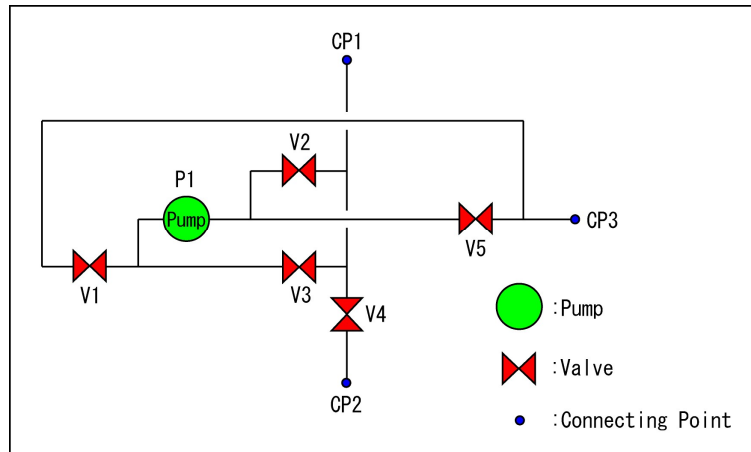
ベテラン技術者が扱っている設計問題が「難しい」と考えられている大きな原因:

- 1) **実は多目的最適化問題**となっているのだが、設計者がそれに気付いていない
- 2) **評価項目(目的関数)の定式化があいまいで、きちんと数値化されていない**

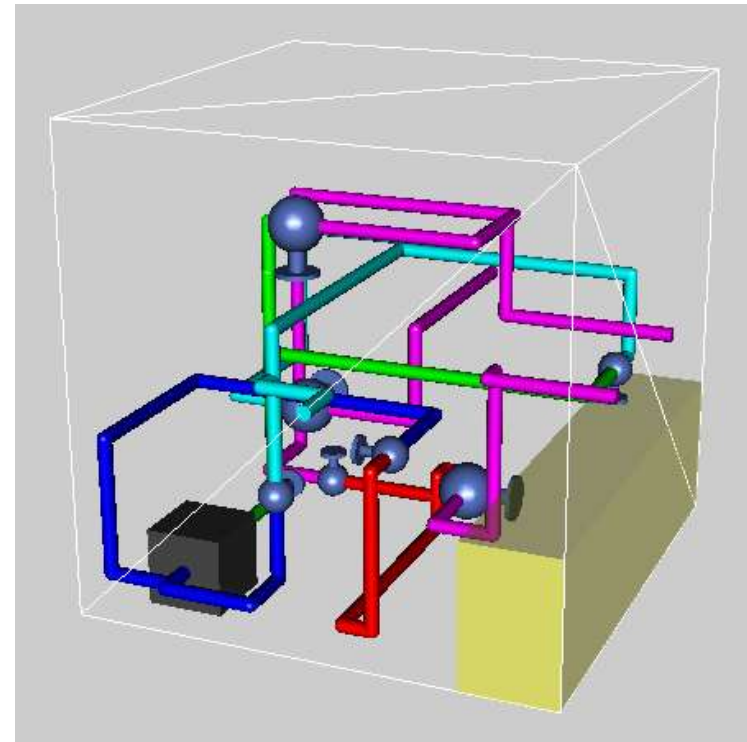
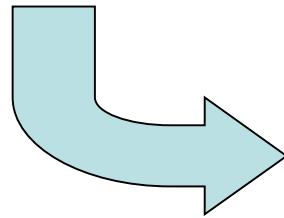
→設計案の優劣の判定などはベテラン技術者の勘や経験で行われている**評価を数値化**し設計問題を**多目的最適化で定式化**すれば単純になる



# 多目的最適化の例：配管設計問題



【系統図】



## ●最適化すべきパラメータ:

各パイプの位置・長さなど(数十個) → **設計変数  $x$**

## ●配管設計案の評価:

- (1) 製造コスト(管路径 × 管路長の合計)  $f_1$
- (2) バルブの操作性  $f_2$
- (3) パイプのメンテナンス性  $f_3$

同時に多様な  
評価を満足さ  
せなければな  
らない



**多目的**

# 【多目的最適化の解法】

## (1) 単目的最適化手法を利用する方法

多目的最適化問題は、目的関数のトレードオフ比を決めれば  
単目的最適化問題に帰着される



様々なトレードオフ比の組合せに対して単目的最適化手法を適用

場合によってはかなり強力だが、目的関数の次元数は2～3程度まで

## (2) 多目的遺伝的最適化手法

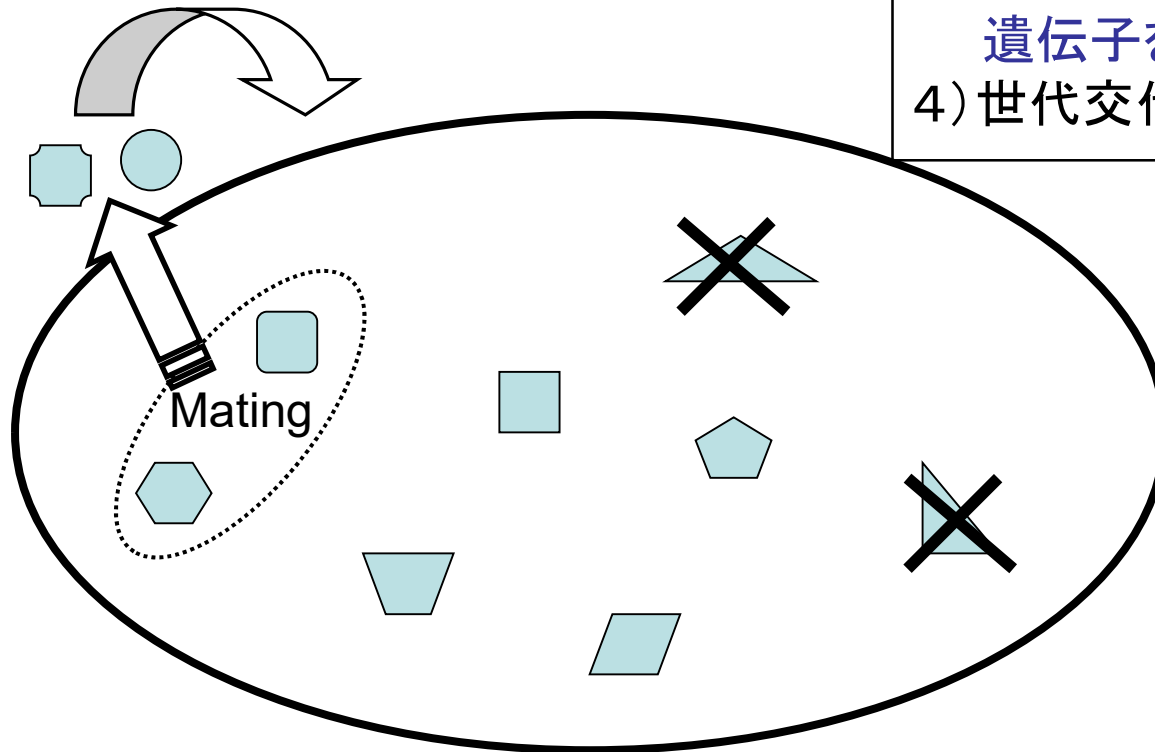
交叉方法: 単目的の場合と同じ  
ただし交叉における親個体の選択にはノウハウあり

世代交代方法: NSGA2 (ドミネート淘汰戦略+ニッチング)

# 【復習：遺伝的手法による最適化】

## 生物の進化の仕組みを模倣

生物個体 → 遺伝子によるコード化  
優れた個体 → 高い評価値・生存率



### 【処理手順】

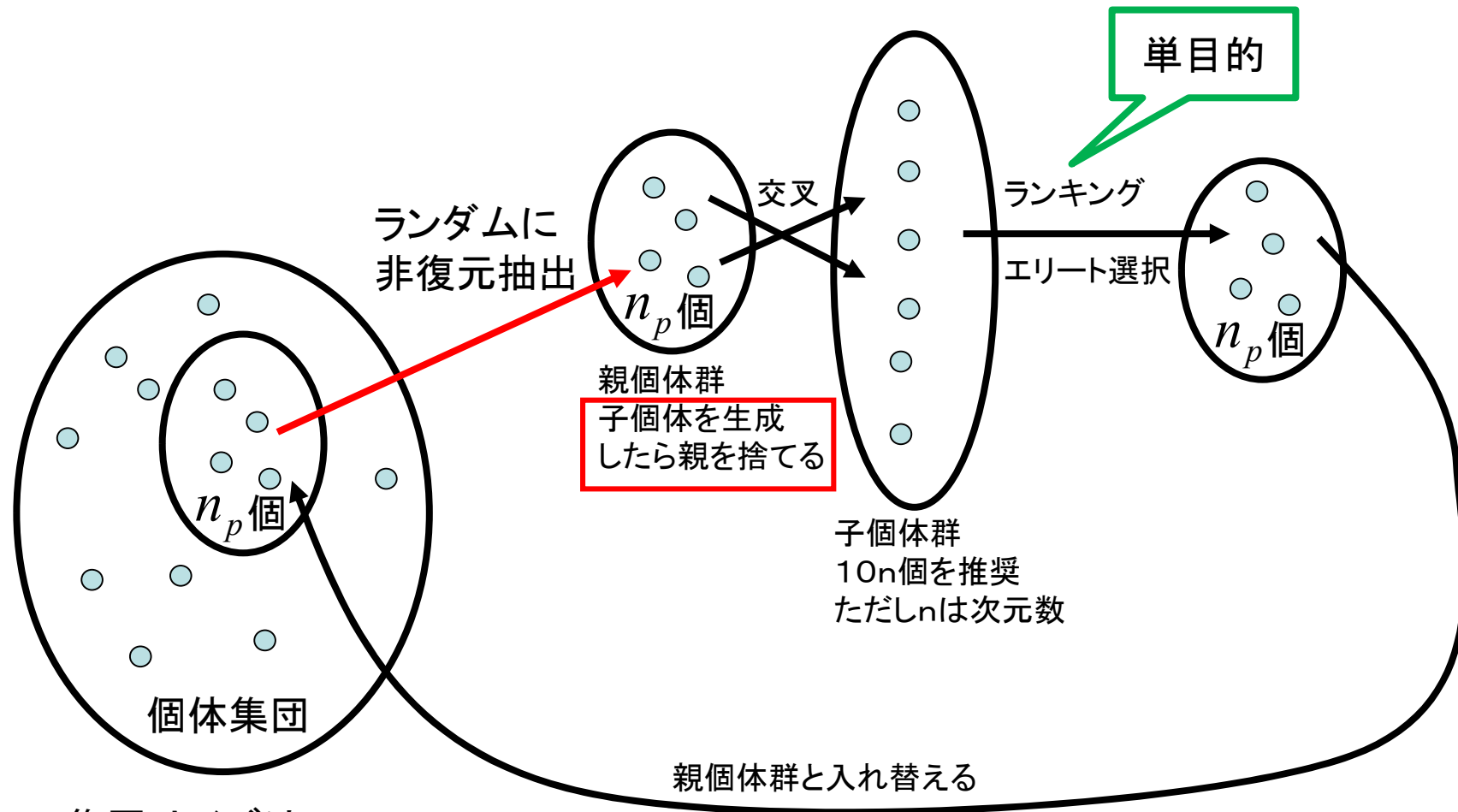
- 1) 設計したい物をパラメータ化 → 遺伝子
- 2) いろいろな個体を集めて集団を作り、  
個体を評価に応じて自然淘汰
- 3) 生き残った個体同士で  
遺伝子を交換 → 新しい個体生成
- 4) 世代交代を繰り返し、集団を進化

### 【探索の特徴】

- ・評価値の悪い個体でも  
生き残るチャンスが与えられる
- ・優れた親同士を掛け合わせる  
ことで、両親の優れた形質を  
受け継いだ子個体が生成される
- ・集団全体が進化していく

たった1つの解候補を改善していくよりも、  
より優れた解や多様な評価を持つ複数の解を発見できる

# 多親世代交代モデルJGG [小林2007]

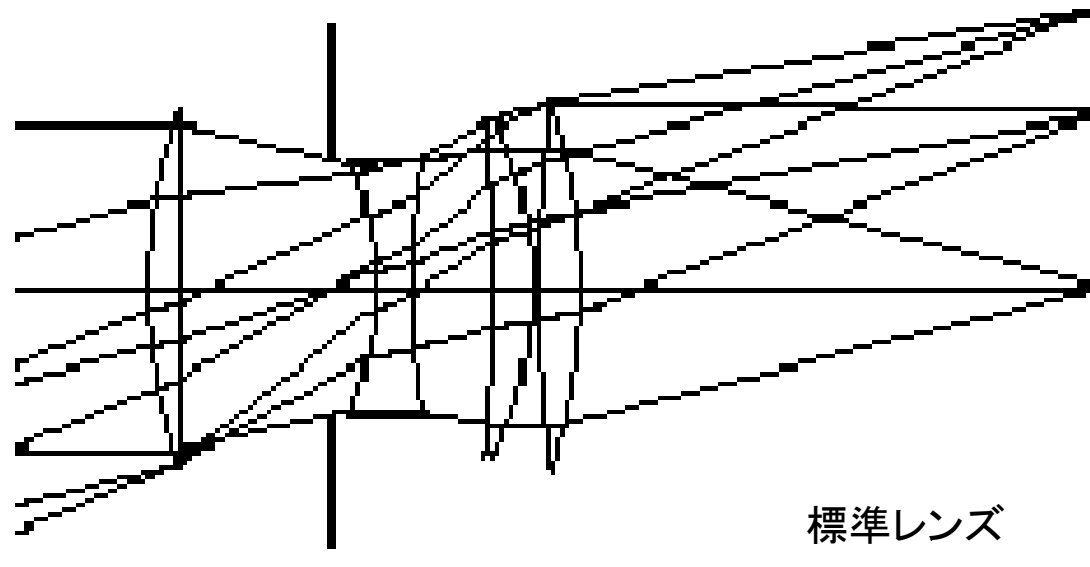


集団サイズは  
 $15n \sim 50n$  個を推奨  
ただし  $n$  は次元数

MGGと比較すると 2.5~13倍の性能アップ

# 多目的最適化と遺伝的手法

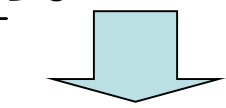
例) レンズ系の自動設計



● レンズ系を特徴付けるパラメータ:  
各レンズの曲率、レンズ間距離など(数十個) → 遺伝子

- レンズ系の評価:
- (1) 歪曲 (distortion)
  - (2) 焦点 (focus)
  - (3) 色収差 (色のにじみ)
  - (4) その他 (像の明るさ、製造コスト、丈夫さなど)

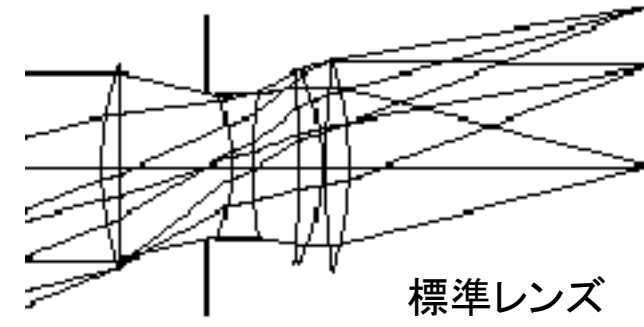
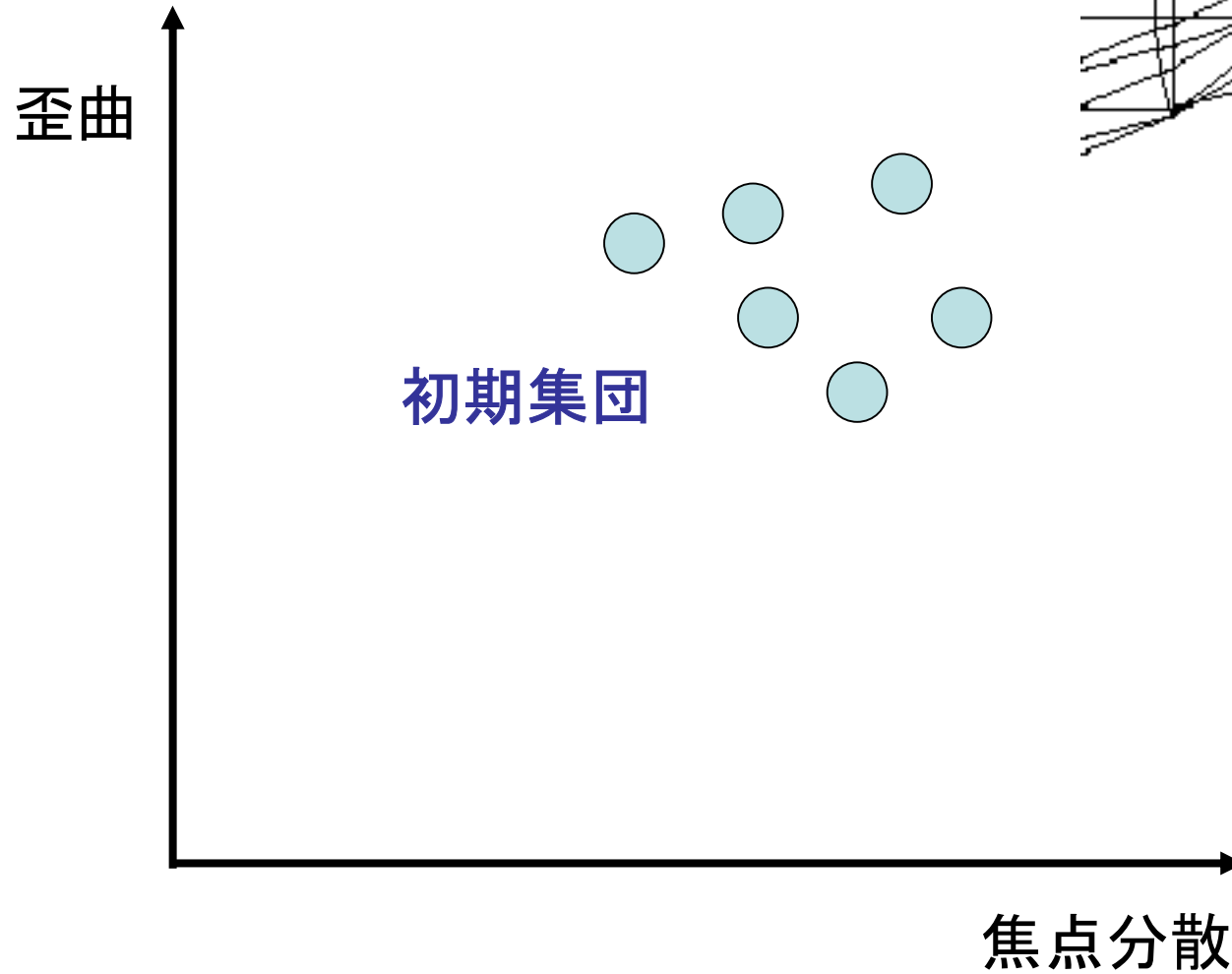
同時に多様な  
評価を満足さ  
せなければな  
らない



多目的

# GAによる多目的最適化の例: レンズ系の自動設計

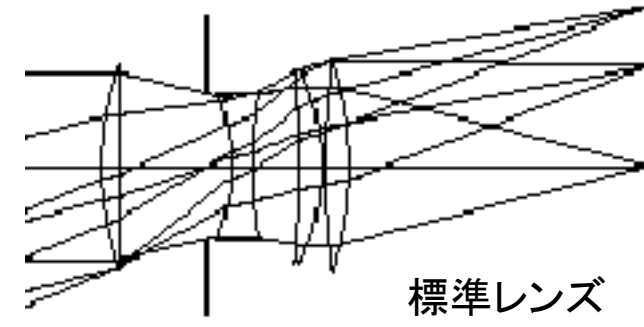
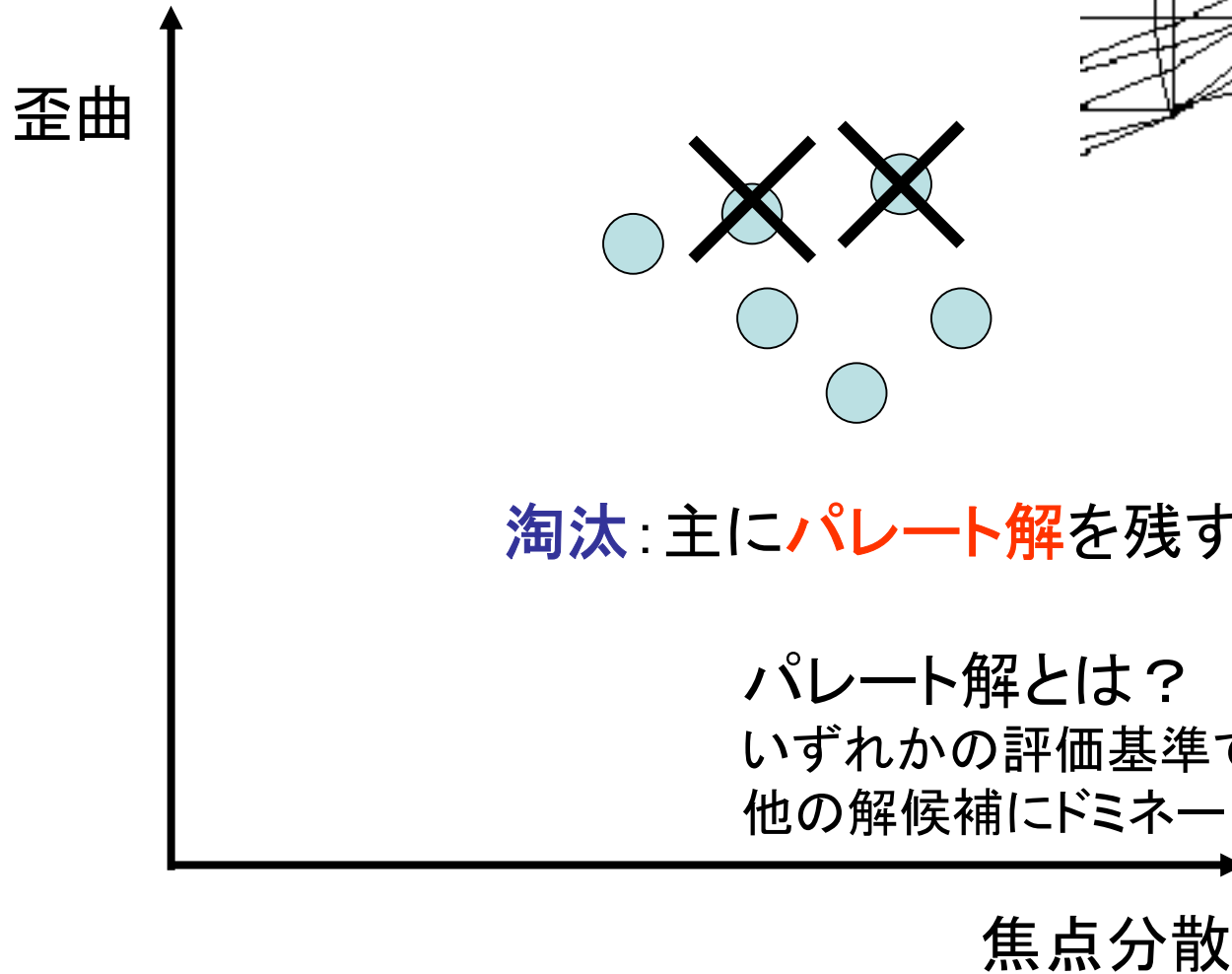
世代交代方法を多目的に合わせる





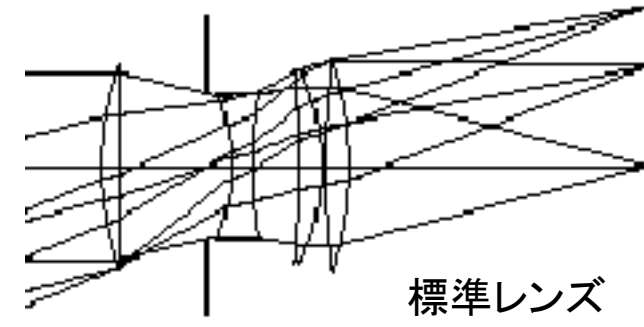
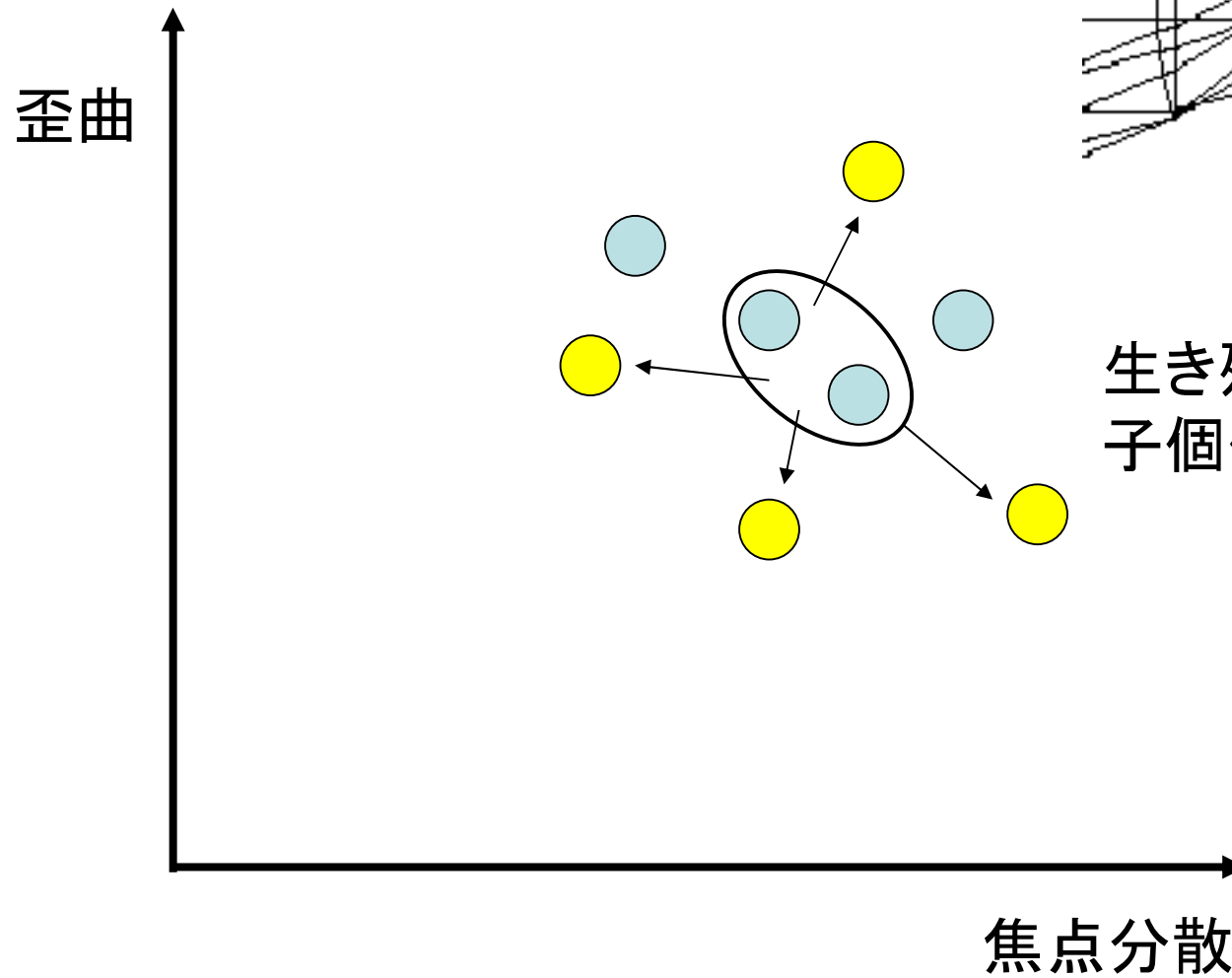
# GAによる多目的最適化の例: レンズ系の自動設計

世代交代方法を多目的に合わせる



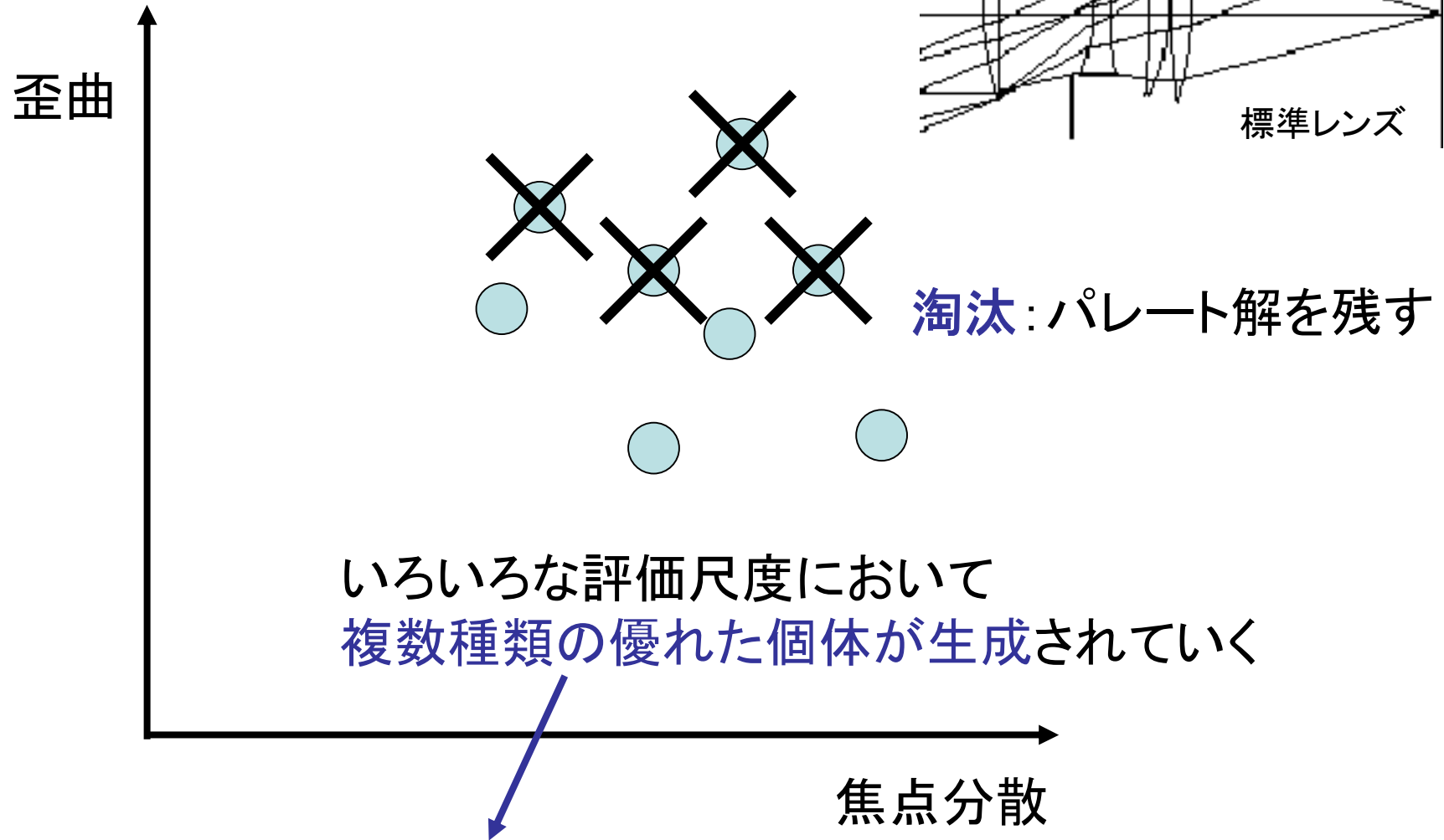
# GAによる多目的最適化の例: レンズ系の自動設計

世代交代方法を多目的に合わせる



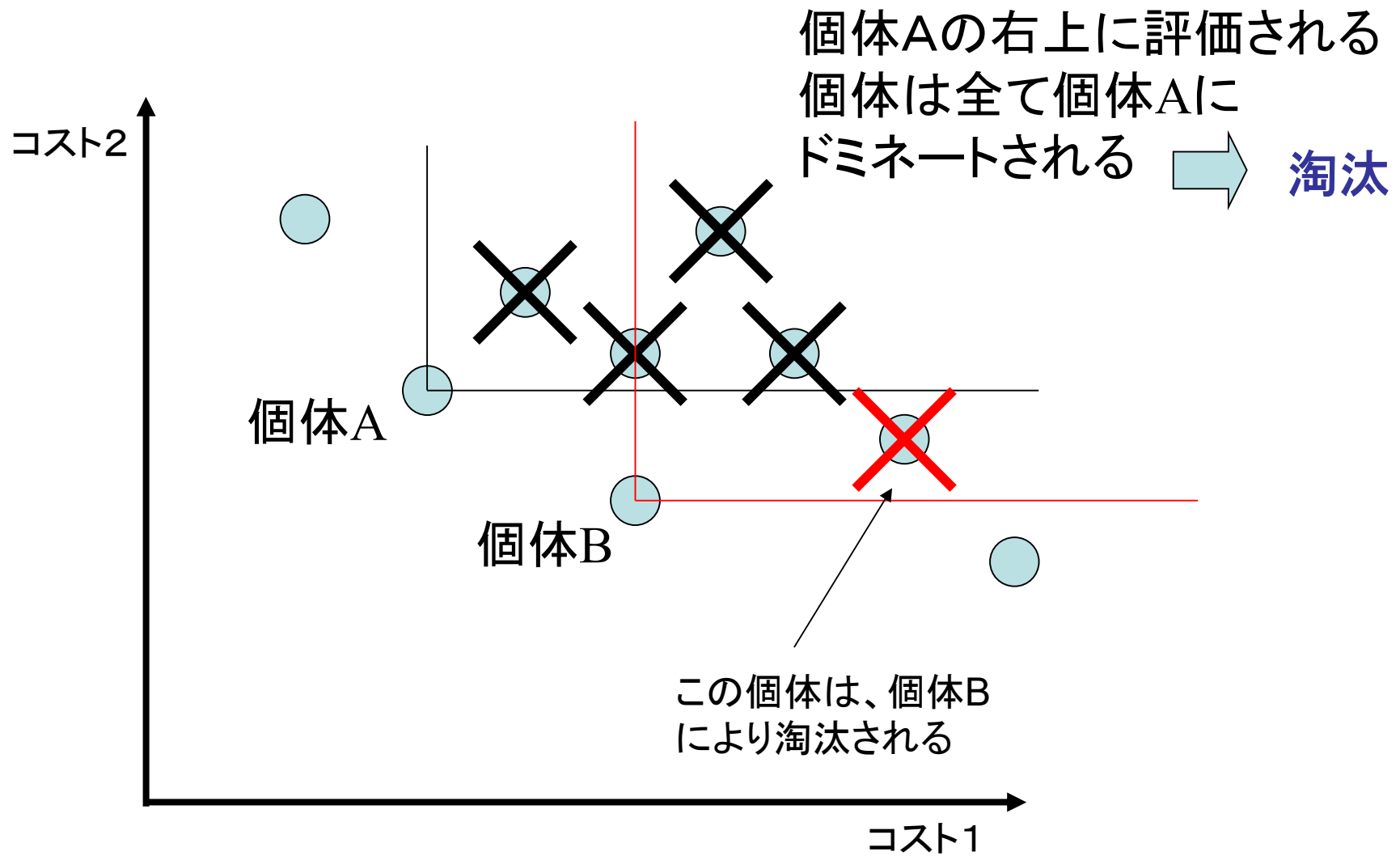
# GAによる多目的最適化の例: レンズ系の自動設計

世代交代方法を多目的に合わせる



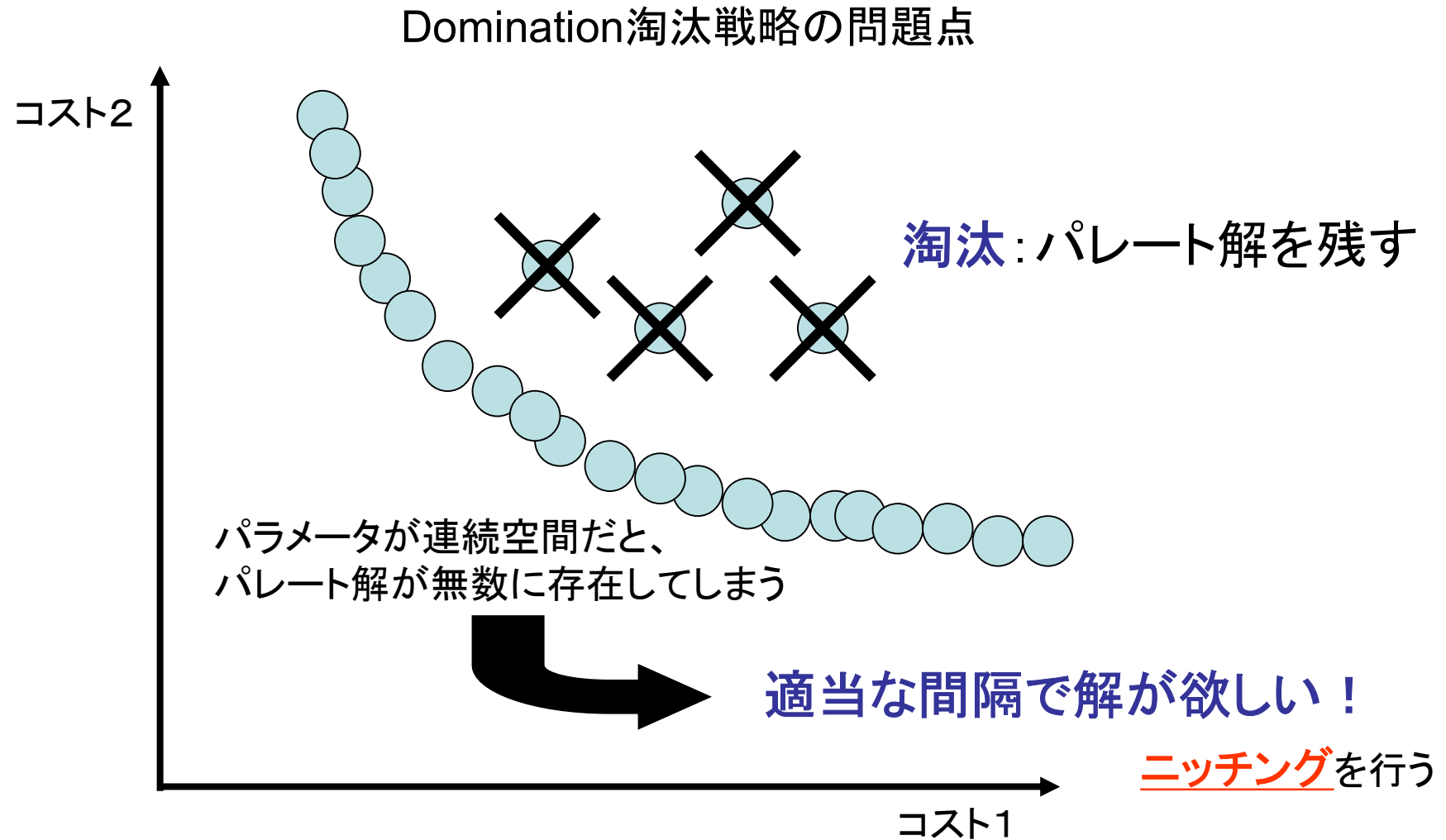
提示された複数の解候補から選択して設計できる

# GAによる多目的最適化における淘汰戦略



他の解候補にドミネートされないパレート解のみ残していく → Domination淘汰戦略

# GAによる多目的最適化における淘汰戦略

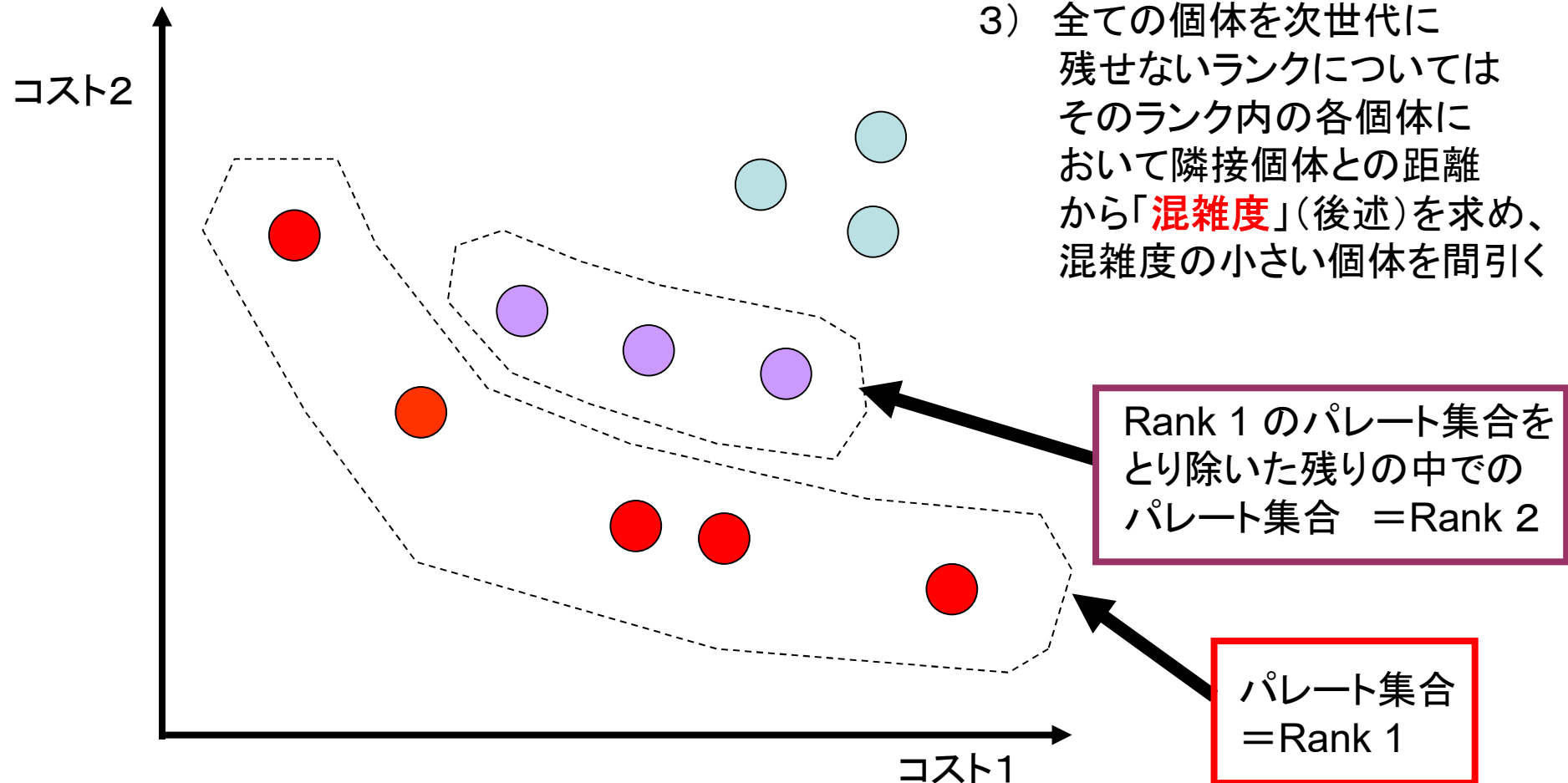


他の解候補にドミネートされないパレート解のみ残していく → Domination淘汰戦略

# GAによる多目的最適化における淘汰戦略: NSGA2

NSGA: Non-dominated Sorting Genetic Algorithm  
[K. Deb and T. Goel, 2001]

- 1) ランキングを行う(図を参照)
- 2) 次世代に残す世代をランクの高い順に選択
- 3) 全ての個体を次世代に残せないランクについてはそのランク内の各個体において隣接個体との距離から「混雑度」(後述)を求め、混雑度の小さい個体を間引く

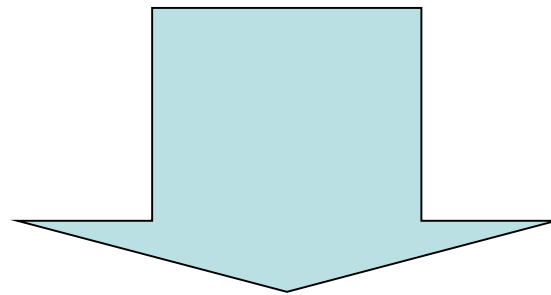


2007年現在、多目的GAではこのNSGA2が世界的にスタンダード

## 【補足】 NSGA2での「混雑度」の求め方

目的関数が2つの場合は、各ランク内で「隣接する個体間の距離」を求めるのは簡単だが、目的関数がもっと高次元だったらどうするか？

各ランク内の個体集合を**目的関数別にソート**し、全個体それぞれの隣接する個体との距離を求め、全ての目的関数における距離の和をその個体の混雑度とする。  
(ある目的関数において**端にある個体は、その目的関数における距離の最大値を与える**)

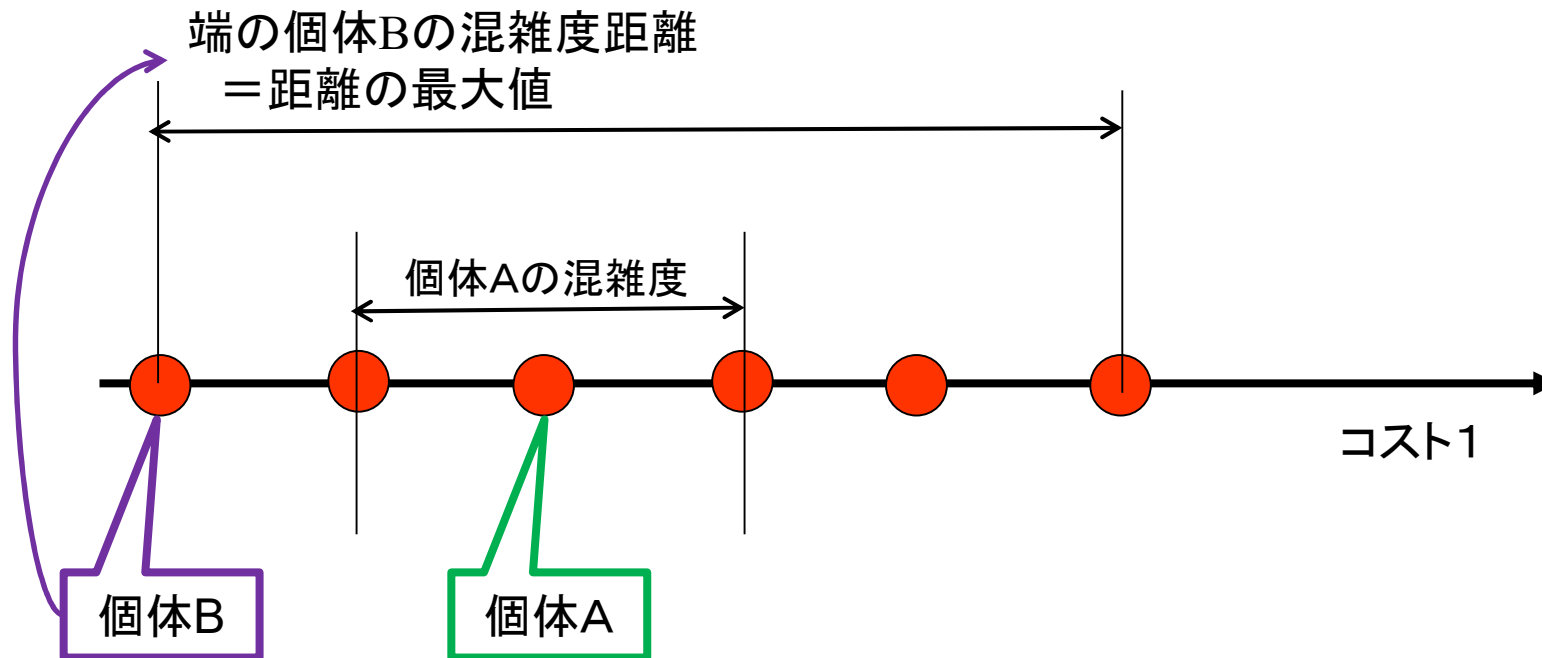


パラメータを必要としない優れた方法

**パラメータ空間でソート**して多様な解を残す方法も提案されている

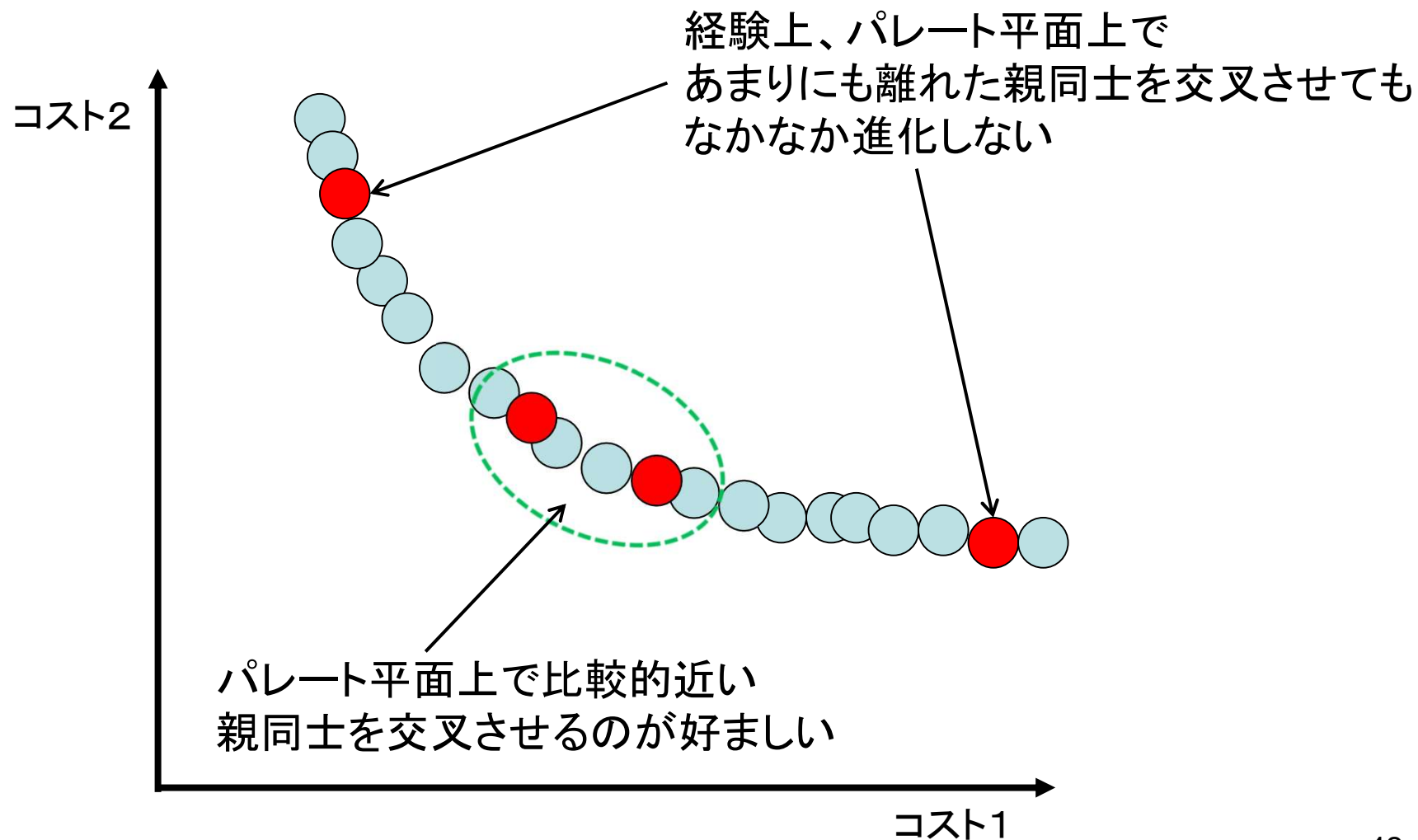
注目している個体が「無い」場合と、「追加した」場合のハイパーボリュームの差の大きさを混雑度とする場合もあるが、目的関数が高次元になると計算コストがかかる

# 「混雑度」の計算例 @目的関数空間

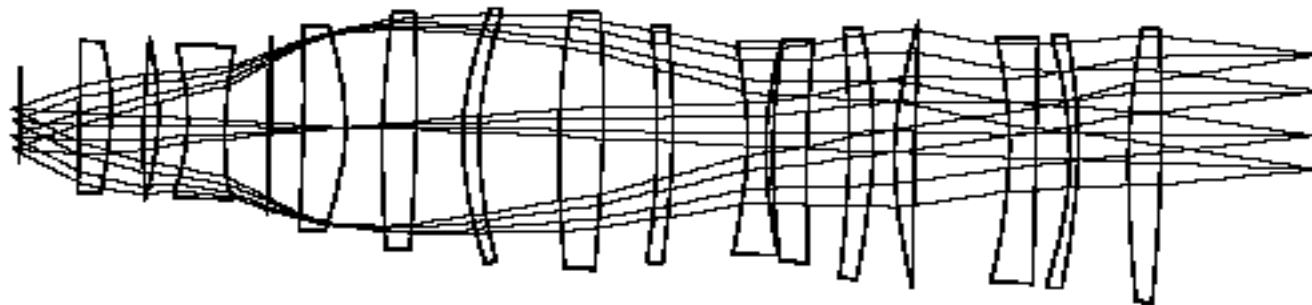
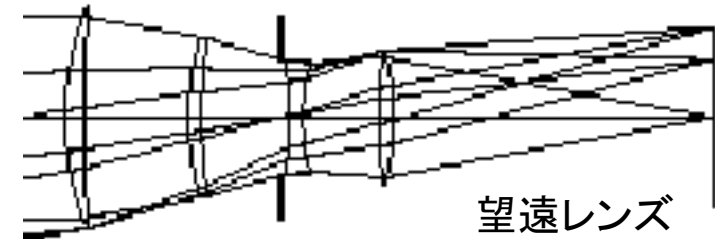
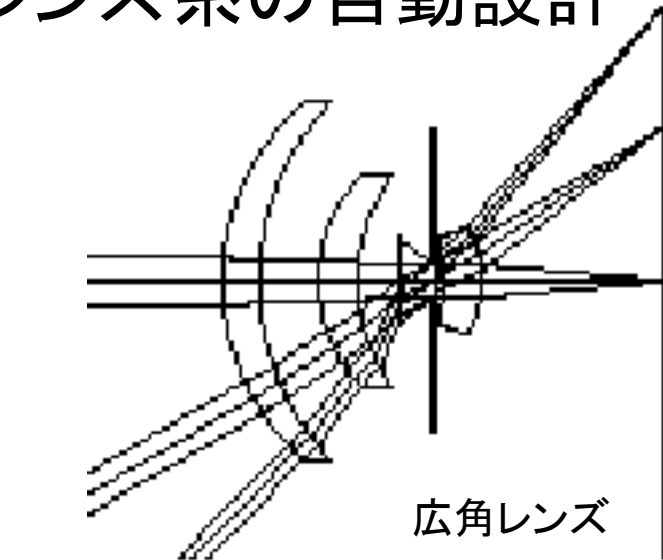
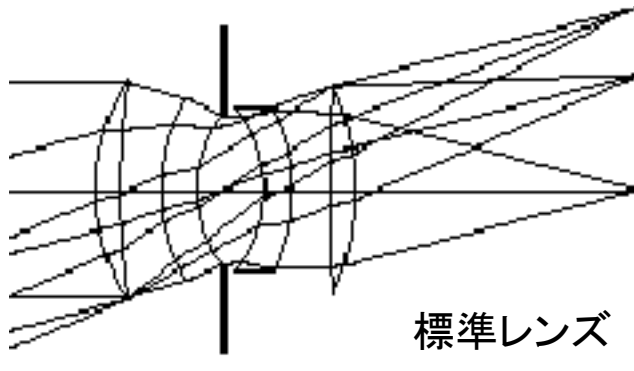
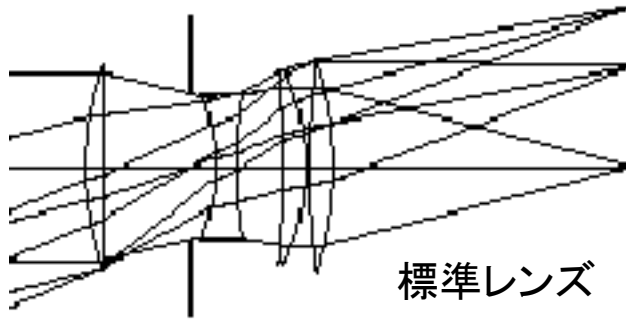




# 【参考】 多目的の連続関数最適化における親個体の選択について



# 遺伝的アルゴリズム(GA)の応用: レンズ系の自動設計



15枚組投影レンズ

評価値が最大になるようなレンズパラメータを探索  
→新しいレンズの組合せを発見

# 参考文献

- 1) 長尾 智晴: 最適化アルゴリズム, 昭晃堂 (2000).
  - 2) 小林重信: 実数値GAのフロンティア  
人工知能学会誌 Vol.24, No.1, pp.128--143, (2009).
  - 3) 小野 功, 佐藤 浩, 小林 重信:  
単峰性正規分布交叉UNDXを用いた実数値GAによる関数最適化,  
人工知能学会誌 Vol.14, No.6, pp.1146—1155 (1999).
  - 4) K.Deb and T.Goel. Evolutionary Multi-Criterion Optimization,  
Springer, pp.67--81 (2001)
- ニッチングの戦略 NSGA2 の説明は以下のURLを参考にした  
同志社大学 知的システムデザイン研究室  
[http://mikilab.doshisha.ac.jp/dia/research/mop\\_ga/moga/3/3-5-5.html](http://mikilab.doshisha.ac.jp/dia/research/mop_ga/moga/3/3-5-5.html)

# まとめ

## 多目的最適化 と 遺伝的多目的最適化手法

### 【多目的最適化とは？】

- 1) 評価項目(コスト関数)が複数存在する
- 2) 評価値同士を足し合わせることができない
- 3) 評価値のトレードオフ比を決めることも困難

### 【多目的最適化問題の特徴】

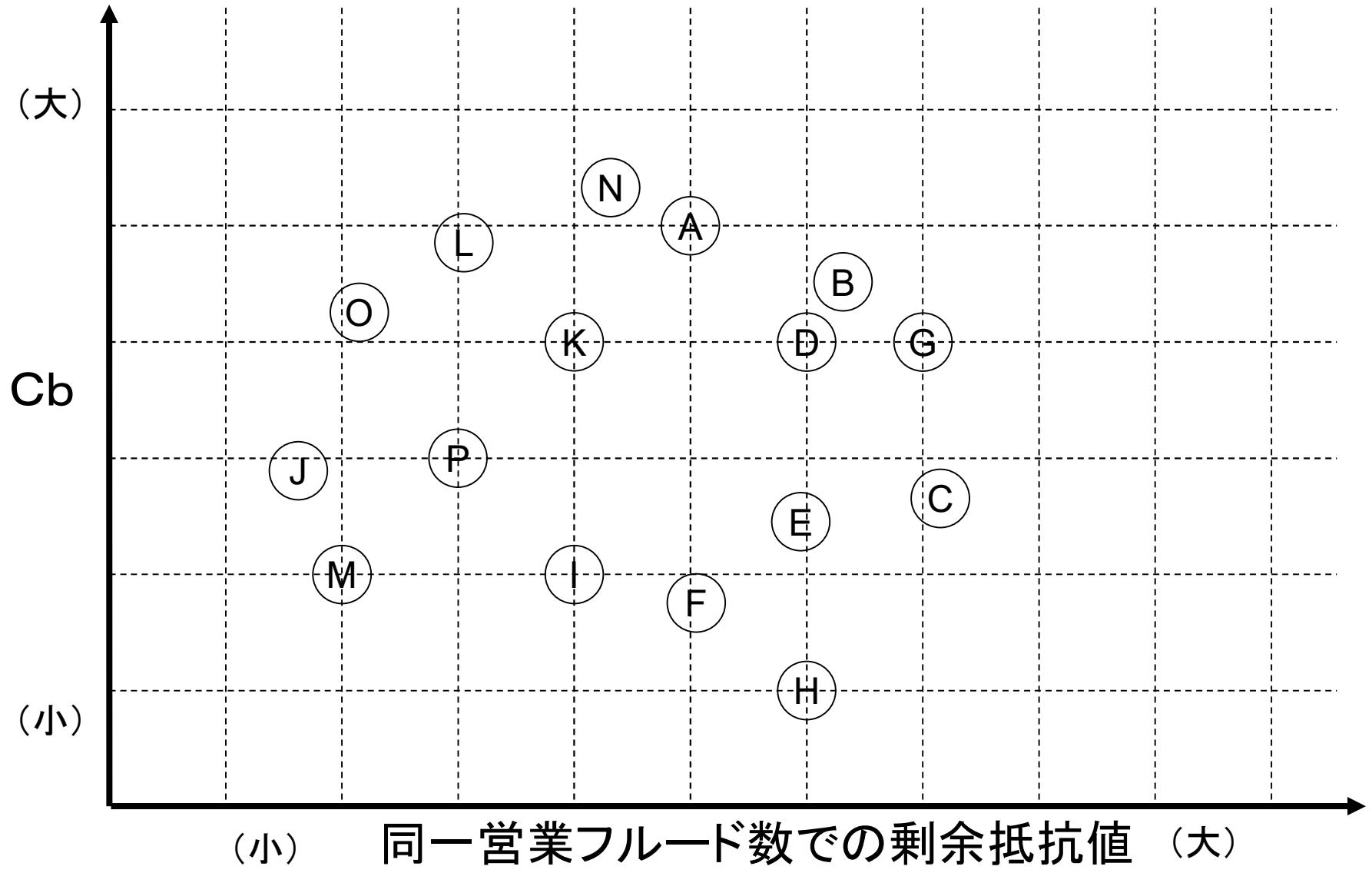
- 1) 最適解は複数(場合によっては無数に)存在し得る → **パレート解**

### 【多目的最適化問題の解法】

- 1) トレードオフ比を変えて単目的最適化を繰り返す ← 目的関数2次元程度
- 2) 多目的遺伝的手法:
  - ・ 交叉方法: 単目的の場合と同じ(ただし親個体の選択方法にノウハウ)
  - ・ 世代交代方法: **NSGA2** (パレート淘汰戦略+ニッチング)

「あいまいな評価の数値化」と「多目的最適化問題への定式化」により  
ベテラン技術者の扱う設計作業を自動化できる可能性  
ただし過度な多目的化はほとんどの解がパレート解になってしまうため避けるべき

以下のようにA~Pに示される  
LppとBが全て同じ船型の候補が存在するとき、  
NSGA2を用いて**6個の解候補**を選択せよ



## お知らせ

1月27日(月)の「システム設計工学」は通常どおり10:30—12:00で講義を実施します。

### システム設計工学 期末試験について(再試を含む)

【日時】 1月31日(金) 2限 (10:30~12:00)

【場所】 船1講義室

#### 【持込み可能な物】

筆記用具

**A4用紙1枚の手書きメモ (裏面も使用可・試験終了時に答案と共に回収)**

コピーなど手書きでないものを持ち込んだ場合は答案を0点とする。

計算機の持込不可

授業の資料・演習解答・過去問は  
<http://sysplan.nams.kyushu-u.ac.jp/gen/index.html>  
または「木村元 九州大学」でググると早い

レポート・演習の提出や質問は  
W2号館6階 634号室 木村まで