船舶海洋システム工学コース「計算工学演習第一」

MAXIMAによる数式処理(2)

MAXIMA（マキシマ）は数式を代数的に解くことが可能でグラフ描画も可能なフリー（無料）のソフトウエア

連立方程式・微分方程式・行列などを扱える

以下のサイトへアクセス：

http://maxima.sourceforge.net/

Top ＞ Download(s) ＞ Installation of Maxima in Windows ＞

使用しているWindowsに合わせて64bit版か32bit版をダウンロードしてインストール

行列の定義：matrix()

(%i1) A:matrix([1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

行列Aを定義

最後に[Shift]キーを押しながら[Enter]キーを押すと計算結果が表示される

(%i2) B:matrix([a,b,c,d],[e,f,g,h]);

(%o2) $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix}$

行列Bを定義

行列の和・積・スカラー倍

(%i1) A:matrix([1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

(%i2) B:matrix([a,b,c],[d,e,f],[g,h,i]);

(%o2) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

(%i3) A+B;

行列AとBの和

(%o3) $\begin{bmatrix} a+1 & b+2 & c+3 \\ d+4 & e+5 & f+6 \\ g+7 & h+8 & i+9 \end{bmatrix}$

(%i4) A.B;

行列AとBの積

(%o4) $\begin{bmatrix} 3g+2d+a & 3h+2e+b & 3i+2f+c \\ 6g+5d+4a & 6h+5e+4b & 6i+5f+4c \\ 9g+8d+7a & 9h+8e+7b & 9i+8f+7c \end{bmatrix}$

行列Bのスカラー積

(%i6) 3*B;

(%o6) $\begin{bmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{bmatrix}$

行列のべき乗

(%i9) A;

(%o9) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

行列A

(%i7) A^^3; ← 行列Aの3乗

(%o7) $\begin{bmatrix} 468 & 576 & 684 \\ 1062 & 1305 & 1548 \\ 1656 & 2034 & 2412 \end{bmatrix}$

(%i8) A.A.A;

(%o8) $\begin{bmatrix} 468 & 576 & 684 \\ 1062 & 1305 & 1548 \\ 1656 & 2034 & 2412 \end{bmatrix}$

(%i10) B;

(%o10) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

行列B

(%i12) B^^2; ← 行列Bの2乗

(%o12) $\begin{bmatrix} c\,g+b\,d+a^2 & c\,h+b\,e+a\,b & c\,i+b\,f+a\,c \\ f\,g+d\,e+a\,d & f\,h+e^2+b\,d & f\,i+e\,f+c\,d \\ g\,i+d\,h+a\,g & h\,i+e\,h+b\,g & i^2+f\,h+c\,g \end{bmatrix}$

行列の転置 transpose()

(%i10) B;

(%o10) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

行列B

(%i13) transpose(B); ← 行列Bの転置

(%o13) $\begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$

行列の階数を求める：rank()

(%i9) A;

(%o9) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

(%i14) rank(A);

(%o14) 2

逆行列を求める
invert():

```
(%i2) B:matrix([a,b,c],[d,e,f],[g,h,i]);
```

(%o2) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

行列B

行列Bの逆行列

```
(%i15) invert(B);
```

(%o15) $\begin{bmatrix} \frac{ei-fh}{a(ei-fh)+b(fg-di)+c(dh-eg)} & \frac{ch-bi}{a(ei-fh)+b(fg-di)+c(dh-eg)} & \frac{bf-ce}{a(ei-fh)+b(fg-di)+c(dh-eg)} \\ \frac{fg-di}{a(ei-fh)+b(fg-di)+c(dh-eg)} & \frac{ai-cg}{a(ei-fh)+b(fg-di)+c(dh-eg)} & \frac{cd-af}{a(ei-fh)+b(fg-di)+c(dh-eg)} \\ \frac{dh-eg}{a(ei-fh)+b(fg-di)+c(dh-eg)} & \frac{bg-ah}{a(ei-fh)+b(fg-di)+c(dh-eg)} & \frac{ae-bd}{a(ei-fh)+b(fg-di)+c(dh-eg)} \end{bmatrix}$

行列式を求める
determinant():

```
(%i2) B:matrix([a,b,c],[d,e,f],[g,h,i]);
```

(%o2) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

行列Bの行列式

```
(%i16) determinant(B);
```

(%o16) $a(ei-fh)-b(di-fg)+c(dh-eg)$

行列の固有値を求める
eigenvalues():

```
(%i1) A:matrix([5,-1],[6,-2]);
(%o1) [5  -1]
      [6  -2]
```

行列A

```
(%i2) eigenvalues(A);
(%o2) [[4,-1],[1,1]]
```

行列Aの固有値を求める

固有値1　固有値2　固有値1の重複度　固有値2の重複度

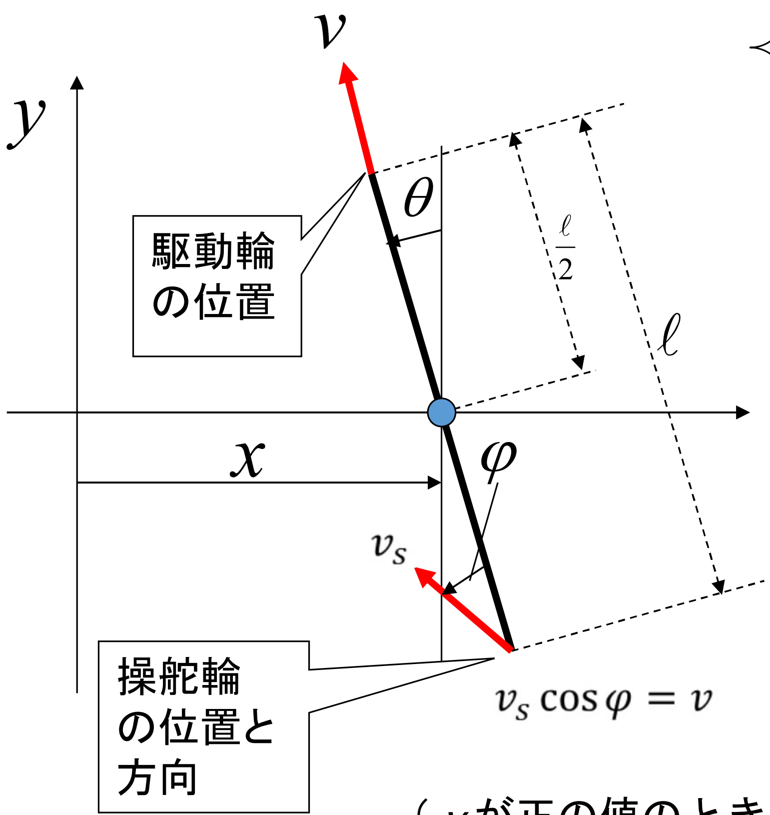
行列の固有値と
固有ベクトルを求める
eigenvectors():

```
(%i1) A:matrix([5,-1],[6,-2]);
(%o1) [5  -1]
      [6  -2]
(%i3) eigenvectors(A);
(%o3) [[[4,-1],[1,1]],[[[1,1]],[[1,6]]]]
```

固有値1に対応する固有ベクトル
固有値2に対応する固有ベクトル

固有値1　固有値2　固有値1の重複度　固有値2の重複度

【演習問題】　車両後進のためのハンドル制御の運動学 (kinematics)



（ vが正の値のとき後進）

車体中央部 ● の速度

$$
\begin{cases}
\dot{x} = \dfrac{-v \sin\theta}{2} + \dfrac{-v_s \sin(\theta+\varphi)}{2} \\[2ex]
\dot{\theta} = \dfrac{-v_s \sin\varphi}{\ell} \\[2ex]
\dot{y} = -v \cos\theta
\end{cases}
$$

ここでx とθ から操舵輪の角度φ を決めるとする:

$$\varphi = k_1 x + k_2 \theta$$

位置フィードバック（$k_1 x$）　角度フィードバック（$k_2 \theta$）

このとき、車両が $x=0, \theta=0$ 付近で
安定した直進バックをするためには
フィードバックゲイン k_1, k_2 を
どのように設定すべきかを考える:

$x \approx 0, \theta \approx 0$ で動作範囲が微小とすると、

sin(a+b)=sin(a)cos(b)+cos(a)sin(b)

$\sin\theta \approx \theta, \quad \cos\theta \approx 1$

$\sin\varphi \approx \varphi, \quad \cos\varphi \approx 1$ のように1次近似できる。すると

車体中央部 ● の速度は

$$\begin{cases} \dot{x} = -v\theta - \dfrac{v\varphi}{2} \\ \dot{\theta} = -\dfrac{v\varphi}{\ell} \end{cases}$$

操舵輪の角度の制御則

$$\varphi = k_1 x + k_2 \theta$$

を代入して整理すると、
以下の微分方程式を得る:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\dfrac{vk_1}{2} & -v\left(1+\dfrac{k_2}{2}\right) \\ -\dfrac{vk_1}{\ell} & -\dfrac{vk_2}{\ell} \end{bmatrix}}_{\text{行列A}} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}$$

x, θ が初期状態に無関係に原点へ収束するための必要十分条件は
行列Aの全ての固有値の実部が負であること

【演習問題１】　車両後進のハンドル制御について、maximaを用いて行列Aの固有値を式で表せ。

【演習問題２】　車両制御の問題において、

速度$v > 0$（後進）

ホイールベース$\ell = 4[m]$,

位置フィードバックゲイン$k_1 = -0.02$,

角度フィードバックゲイン$K_2 = 0$

の場合の行列Aの固有値を計算し、系の収束や安定性について考察せよ。

【演習問題３】　車両制御の問題において、

速度$v > 0$（後進）

ホイールベース$\ell = 4[m]$,

位置フィードバックゲイン$k_1 = -0.05$,

角度フィードバックゲイン$K_2 = 5.0$

の場合の行列Aの固有値を計算し、系の収束や安定性について考察せよ。

演習の提出について

作成したMaximaのファイルを下記の課題提出用フォルダへ、
課題の番号と提出者が分かるようにファイル名を以下のようにしてアップロードせよ

第４回1TE19xxxZ名前.wxmx

https://share.iii.kyushu-u.ac.jp/public/WRy4AAFIvs5AoSABPX9voYni_c03IN8lcIPPqsd3dRKm

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{vk_1}{2} & -v\left(1+\dfrac{k_2}{2}\right) \\ -\dfrac{vk_1}{\ell} & -\dfrac{vk_2}{\ell} \end{bmatrix}$$

の固有多項式は

$$\begin{vmatrix} s+\dfrac{vk_1}{2} & v\left(1+\dfrac{k_2}{2}\right) \\ \dfrac{vk_1}{\ell} & s+\dfrac{vk_2}{\ell} \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(s+\frac{vk_1}{2}\right)\left(s+\frac{vk_2}{\ell}\right) - v^2\left(1+\frac{k_2}{2}\right)\frac{k_1}{\ell} = 0$$

$$\boxed{s = \frac{v}{2}\left\{-\left(\frac{k_1}{2}+\frac{k_2}{\ell}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{k_1}{2}+\frac{k_2}{\ell}\right)^2 + \frac{4k_1}{\ell}}\right\}}$$

固有値
この実部が全て負になるよう
係数を決める

$$|s|^2 = \frac{k_1 v^2}{\ell}$$

よって速度vが負の場合（前進）は
偏差xだけのフィードバックでも収束する